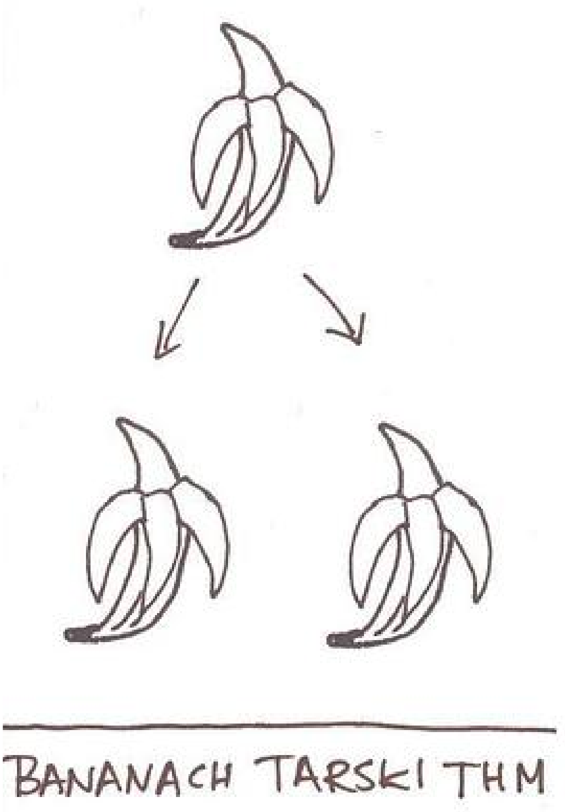
[MACIERZATOR23]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



[O dowodzie możliwości rozmnożenia chleba]

Na początek zastanówmy się, czy spośród studentów można wybrać delegację w ten sposób, aby znalazł(a) się w niej dokładnie jeden (jedna) student(ka) z każdej grupy. Głupie pytanie? Okazuje się, że nie do końca. Odpowiedź jest oczywista - tak samo oczywista jak aksjomat wyboru. Skąd więc wokół niego tyle szumu?

Mimo iż aksjomat wyboru (AC) budzi liczne kontrowersje, w rzeczywistości wszyscy go stosują (świadomie lub nie). Bez jego używania matematyka jest o wiele uboższa, gdyż nie da się udowodnić nawet stosunkowo prostych twierdzeń. Z drugiej strony, niektóre twierdzenia dowiedzione z wykorzystaniem AC wydają się paradoksalne. Wystarczy wspomnieć chociażby o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru (np. R) lub istnieniu bazy w dowolnej przestrzeni wektorowej (np. przestrzeni R nad ciałem Q). Nie jest to jednak jeszcze największe zło. Słynne twierdzenie, znane jako paradoks Banacha-Tarskiego, mówi, że w „zwykłej", trójwymiarowej przestrzeni dowolna kula jest paradoksalna ze względu na działanie grupy izometrii tej przestrzeni. Co to oznacza? Dokładnie tyle, że dowolna kula może być przedstawiona w postaci sumy skończonej liczby zbiorów, które po przekształceniu tylko i wyłącznie przez izometrie dają dwie kule przystające do tej pierwszej! Mówiąc jeszcze prościej - kulę można pociąć na kawałki, z których da się poskładać dwie kule wielkości tej początkowej! Chore? Niemożliwe? A jednak.

W pierwszej chwili każdy powie, że to przecież niewykonalne, bo nie jest spełniona „zasada zachowania objętości". Da się to wyjaśnić w bardzo prosty sposób - w matematyce wspomniana zasada nie istnieje. W rzeczywistości nasze intuicyjne wyobrażenie pojęcia objętości jest bardzo płytkie. We wspomnianym twierdzeniu zbiory, na które dzielimy kulę, są niemierzalne, zatem nie mają objętości. To tłumaczy, dlaczego nie możemy po prostu sobie posumować objętości poszczególnych kawałków.

Kolejne pytanie, które nasuwa się chyba każdemu, brzmi: dlaczego w ten sposób nie postępujemy np. z kulkami złota? Odpowiedź jest także bardzo prosta. Istnieje kilka powodów. Po pierwsze, materia nie jest ciągła. Nie można z niej wyciąć kawałka o dowolnym kształcie, a już tym bardziej niemierzalnego. Gdyby było inaczej, Archimedes byłby nieźle zdezorientowany. Po drugie, dwie kulki złota składają się z dwa razy większej liczby atomów niż jedna.

Sprawa ma się inaczej w przypadku kul (w sensie matematycznym), albowiem jedna kula zawiera dokładnie tyle samo punktów co dwie. Wreszcie dowód omawianego paradoksu jest niekonstruktywny. Wiemy, że nieszczęsny podział istnieje, ale do końca nie wiemy, jak on wygląda.
Przytoczone twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli warto znać co najmniej z dwóch powodów. Pierwszym z nich jest uświadomienie sobie, jak słaba może być nasza intuicja oraz do jak sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem konsekwencji prowadzi aksjomat wyboru. Zaś drugim to, że dane twierdzenie budziło liczne kontrowersje w świecie, a zostało udowodnione przez polskich matematyków - Stefana Banacha i Alfreda Tarskiego.

Szymon

[∏ografie – David Hilbert]

Granice, funkcyjki, ja wszystkie Was dziewczynki,
Obliiczać chcęęę!
Lecz przyznam ja, śni mi się kompletna
Aksjomaatykaaa!
David Hilpura – 'Granice, funkcyjki'

Wyobraźcie sobie następującą sytuację. Jak co dzień, przychodzicie na uczelnię, świadomi, że akurat tego dnia czeka Was ogólnostudenckie spotkanie, organizowane z tego czy innego powodu po raz któryś. Samo spotkanie Wam nie przeszkadza, ale tam będzie ON – ten jeden student, denerwujący, który zawsze wszystko wie, ze wszystkiego jest najlepszy i nie sposób go z czegokolwiek zagiąć, ten, na widok którego wszystkich oskoma z zazdrości bierze. Przychodzicie więc na to spotkanie, jedno oko drga Wam w nerwowym tiku, a ON... wchodzi na podwyższenie, odgarnia włosy z twarzy i zdawkowym tonem rzecze – 'Przygotowałem listę dziesięciu problemów, których nawet ja nie potrafię rozwiązać'. A żeby było jeszcze śmieszniej, w jakiś czas później wydaje książkę, w której zamieszcza te problemy i jeszcze trzynaście innych.

Wyobraziliście sobie? To dobrze, to już mniej więcej wiecie, co czuli matematycy żyjący w latach 1863-1942. W tych latach żył bowiem David Hilbert, prawdopodobnie ostatni matematyk, który znał 'całą' współczesną sobie matematykę.

Przedstawił on listę dziesięciu problemów matematycznych na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w 1900 roku, a w jego wydanej później książce zamieścił on aż 23 takie problemy(oczywiście, nie przedstawił ich jako 'problemów, których nawet on nie potrafi rozwiązać' – w końcu życie było mu miłe). Kim jednak był ten człowiek? Czym się zajmował? I który współczesny mu matematyk, mówiąc kolokwialnie, 'pojechał' go tak, że aż strach?

David Hilbert urodził się w Koenigsbergu, ukończył Wilhelm Gymnasium, gdzie zaprzyjaźnił się z Hermannem Minkowskim, która to przyjaźń będzie potem miała duży wpływ na prace naukowe obu stron. Dzięki wstawiennictwu Felixa Kleina zdobył pracę pracownika naukowego na Uniwersytecie Goettingen, gdzie pracował resztę życia, wychowując wielu z matematyków, których twierdzenia, teorie i odkrycia są dziś na różne sposoby maltretowane przez pokolenia studentów i wykładowców. Podobno to Hilbert jest tajemniczym wykładowcą ze znanej anegdoty o wykładowcy, który, dowiedziawszy się, że jeden z jego studentów porzucił studia by zostać poetą, podsumował go słowami 'I dobrze – na matematyka nie miał dość wyobraźni'.

Pod względem matematycznym Hilbert zajmował się m.in. geometrią - uważa się, że jego odkrycia w tej dziedzinie były najważniejszymi od czasów Euklidesa. Stworzył on 21 aksjomatów geometrii, które zapewne niektórym z biednych studentów są znane aż za dobrze. Hilbert był też matematykiem o tyle swobodnym, że dopuszczał prawo wyłączonego środka – dowody niektórych jego twierdzeń czasem nie polegały na wykazaniu, że coś 'zachodzi', ale raczej że 'nie nie zachodzi', co wzbudzało pewne kontrowersje, które Niemiec podsumował słowami: 'Zabranianie matematykowi używania prawa wyłączonego środka to jak zabronienie bokserowi używania jego pięści'. Poza tym Hilbert należał do szkoły matematyków, którzy dążyli do pełnego sformalizowania i zaksjomatyzowania całej matematyki, stworzenia kompletnej teorii dowodzenia twierdzeń.

Tu do akcji wkracza Kurt Goedel, matematyk niemiecki. Udowodnił on twierdzenie znane jako 'najbardziej pesymistyczne twierdzenie matematyki XX wieku'. W uproszczeniu brzmi ono tak – 'Dla każdej teorii T istnieje zdanie G mówiące, że 'G nie może zostać dowiedzione, używając narzędzi teorii T''. Jeżeli G jest prawdziwe, oznacza to, że nasza teoria T nie jest 'kompletna', gdyż istnieją zdania, których prawdy lub fałszu nie da się dowieść za jej pomocą. Jeżeli G jest fałszywe, oznacza to, że w teorii T prawdziwe są jednocześnie zdanie i jego zaprzeczenie – bo skoro G jest prawdziwe, oznacza to, że posiada dowód, a zdanie G głosi, że dowód dla niego nie istnieje. Jednym z wniosków z tego twierdzenia – znanego jako twierdzenie o niezupełności – jest to, że program Hilberta i jego zwolenników, czyli pełna aksjomatyzacja i stworzenie kompletnej teorii matematycznej jest niemożliwe. Wnioskiem z twierdzenia Goedla jest też twierdzenie o niedowodliwości niesprzeczności, które głosi że w ramach żadnego systemu formalnego zawierającego arytmetykę liczb naturalnych nie da się dowieść jego niesprzeczności – więc nigdy się nie dowiemy, czy całe to nasze dodawanie nie jest tak naprawdę psu o łapę roztrzaść ;)

Dowód twierdzenia Goedla w wielce cyniczny sposób zbiegł się z wypowiedzią Hilberta, który powiedział swoim współpracownikom: 'Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć'(Nawiasem, ów cytat znajduje się na nagrobku Hilberta). Poprzedniego dnia ukazał się ów dowód, powodując, że Hilbert – jak to eufemistycznie ujmują kroniki – 'dość mocno się zdenerwował'. Co ciekawe, Hilbert zajmował się też fizyką i przez jakiś czas istniały pewne kontrowersje co do niektórych zagadnień z teorii względności – czy opracował je Einstein, czy Hilbert. Ale spokojnie, żadna teoria spiskowa z tego nie powstała – prace Hilberta jednak powstały później.

Z każdym upływającym rokiem szanse na narodzenie się kolejnego Davida H, który zdoła opanować całą matematykę, rozwijającą się w tempie wręcz ekspotencjalnym, maleją – aktualnie wynoszą mniej więcej ε. Więc pamiętajmy o tym jednym, którego ambicje zostały w tak bezwzględny sposób zjechane przez jednego Goedla i bezwzględną, niedobrą, pilnującą swoich praw matematykę.

Niewinny Rosomak

[Liczby pierwsze na płaszczyźnie]

Powszechnie wiadomo, że liczby pierwsze są rozmieszczone w sposób wyjątkowo mało regularny. Zróbmy jednak pewną sztuczkę. Wypiszmy sobie wszystkie liczby naturalne (począwszy od 1) spiralnie - tak jak pokazano na rysunku 1.

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49...

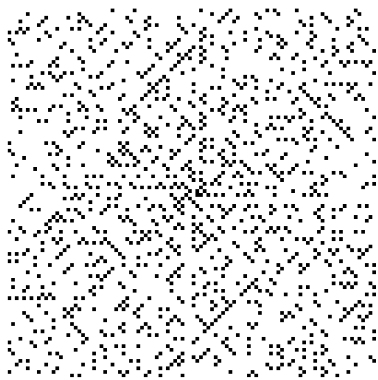
Rysunek 1

Następnie wykreślmy wszystkie liczby pierwsze (tak jak na rysunku 2). Zauważmy, że liczby pierwsze zdają się układać w ukośne (nachylone pod kątem 45˚ do krawędzi rysunku) linie. Przyjrzyjmy się większemu rysunkowi.

~~37~~	36	35	34	33	32	~~31~~
38	~~17~~	16	15	14	~~13~~	30
39	18	~~5~~	4	~~3~~	12	~~29~~
40	~~19~~	6	1	~~2~~	~~11~~	28
~~41~~	20	~~7~~	8	9	10	27
42	21	22	~~23~~	24	25	26
~~43~~	44	45	46	~~47~~	48	49...

Rysunek 2

Rysunek 3 przedstawia spiralę utworzoną z liczb od 1 do 40401 (czarna kropka symbolizuje liczbę pierwszą). Tutaj też wyraźnie widać, że liczby pierwsze „chętnie" układają się na skośnych liniach.



Rysunek 3

Własność tą zaobserwował w 1963 roku Stanisław Ulam, a spirala, której konstrukcje przedstawiono powyżej nosi nazwę Spirali Ulama. Spirala Ulama tak urzekła ówczesnych matematyków, że została umieszczona na okładce marcowego wydania Scientific American w 1964 roku.

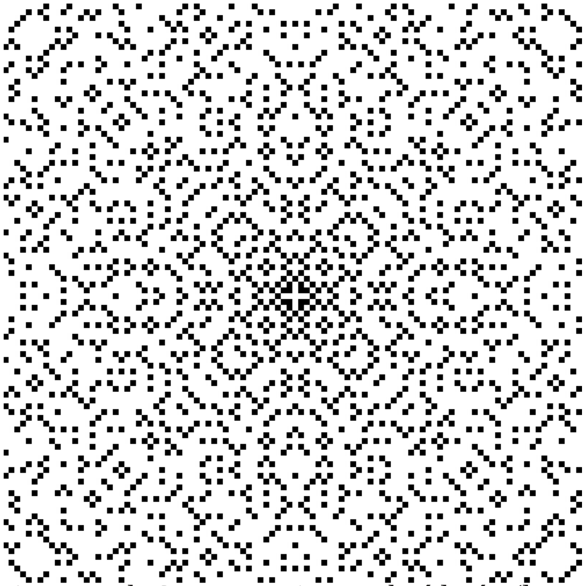
Niestety fakt, że liczby pierwsze układają się w spirali Ulama na liniach ukośnych nie przynosi wielkich korzyści przy poszukiwaniu coraz to większych liczb pierwszych.
Oczywiście każdy student matematyki wie, że wszystkie pojęcia można uogólnić. Tak też jest z pojęciem liczby pierwszej – można je rozszerzyć na dowolne pierścienie.

Zajmijmy się pierścieniem liczb całkowitych Gaussa. Rozważmy zbiór **Z**[i]={a+bi:a,bє**Z**}. Zbiór ten ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb zespolonych tworzy pierścień. Jest to dodatkowo pierścień z tzw. jednoznacznym rozkładem. Oznacza to tyle, że dowolny element tego pierścienia można przedstawić jednoznacznie[1] w postaci iloczynu elementów nierozkładalnych tego pierścienia. Można również pokazać, że w przypadku pierścieni z jednoznacznym rozkładem element pierwszy to taki sam element jak element nierozkładalny (w ogólnym przypadku występuje pewna różnica). Stąd płynie dla nas ważny wniosek: w przypadku pierścienia Gaussa tak samo łatwo (lub tam samu trudno), jak w przypadku liczb całkowitych, jest sprawdzić czy dana liczba jest liczbą pierwszą czy też nią nie jest.

Zauważmy jednak, że nie wszystkie „powszechnie znane liczby pierwsze” są liczbami pierwszymi Gaussa. Przykładowo 2 można rozłożyć na (1+i) (1-i) a 5=(2+i) (2-i). Liczbą pierwszą Gaussa jest np. liczba 1+i lub 2+3i Z pomocą komputera można wyznaczyć więcej liczb pierwszych Gaussa i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej.

1 - Oczywiście chodzi o jednoznaczność z dokładnością do kolejności współczynników oraz stowarzyszenia. W przypadku liczb całkowitych rozkład 12 na 2·2·3 utożsamiamy z rozkładem 2·3·2 oraz 1·(-2)·3·(-2)

Otrzymamy wówczas następujący rysunek (na środku znajduje się liczba 0):



Pośród liczb pierwszych Gaussa można szukać lwów(lew to maksymalny zbiór ściśle sąsiadujących ze sobą liczb pierwszych Gaussa). A jest ich dokładnie 52. Jest to jednak zupełnie inna historia.

vil

[Anons]

Dnia 1 czerwca 2009 roku o godzinie 19.00 w kościele akademickim(krypta katedry, ul. Jordana) odprawiona zostanie msza święta w intencji
ŚP.
Krystyny i Marka Kuczmów
oraz **Martina Grinča,**
do udziału w której zapraszamy.

[Stopka redakcyjna]

Kontakt z redakcją: bezpośrednio- w pokoju KNM (p.524) lub pocztą elektroniczną na adres:

macierzator@knm.katowice.pl www.macierzator.yoyo.pl