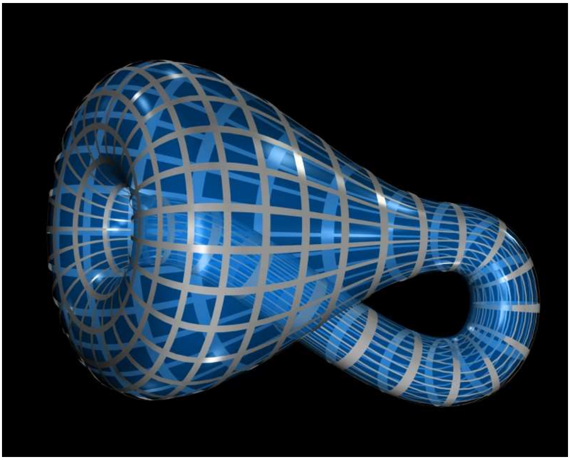
[MACIERZATOR38]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Witamy w letnim numerze [MACIERZATORa]!

To już ostatnie wydanie [MACIERZATORA] w tym roku akademickim. Proponujemy Wam artykuł dotyczący trzech twierdzeń Alfreda Tarskiego o punkcie stałym, π-ografię Feliksa Kleina oraz opowieść o pewnej stronie internetowej, na której można znaleźć masę ciekawostek o... liczbach pierwszych. W numerze można też znaleźć kolejne odcinki naszych dwóch nowych cykli – Kącika TEX-owego oraz \begin{document}. Na deser sprawozdanie z XXX wyjazdowej sesji naukowej Koła, która odbyła się w weekend majowy w Szczyrku.

Udanych wakacji życzy

Redakcja

[Twierdzenia Tarskiego o punkcie stałym]

Przedstawimy trzy twierdzenia o punkcie stałym pochodzące od Alfreda Tarskiego. Omówimy relacje pomiędzy nimi, jak również możliwość uzyskania ich w sposób konstruktywny, tj. bez użycia pewnika wyboru. O Alfredzie Tarskim można także przeczytać w [10].

1. [Podstawowe definicje]

Definicja 1.1. Relację $\leqslant$ określoną na zbiorze Ω nazywamy *porządkiem*, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in \Omega$ zachodzą: $x \leqslant x$ (zwrotność), $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (przechodniość), $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (słaba antysymetria).

Definicja 1.2. Niech Ω będzie zbiorem uporządkowanym (tj. w zbiorze Ω jest określona pewna relacja $\leqslant$ spełniająca aksjomaty definicji 1.1). Rozważmy $M \subseteq \Omega$. Jeżeli $y \in \Omega$ spełnia nierówność $x \leqslant y$ dla każdego $x \in M$, to y nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru M. Jeżeli $y \leqslant x$ dla każdego $x \in M$, to y nazywamy *ograniczeniem dolnym* zbioru M. Dalej, $y = \max M$ oznacza, że $y \in M$ i y jest ograniczeniem górnym M, a $y = \min M$ oznacza, że $y \in M$ i y jest ograniczeniem dolnym M. Najmniejsze ograniczenie górne (*supremum*) zbioru M to element $\sup M = \min\{y \in \Omega |\ x \leqslant y$, dla wszystkich $x \in M\}$; największe ograniczenie dolne (*infimum*) zbioru M to element $\inf M = \max\{y \in \Omega |\ y \leqslant x$, dla wszystkich $x \in M\}$. Zbiór M nazywamy *łańcuchem* jeśli dla dowolnych $x, y \in M$ mamy $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$.

Uwaga 1.1. *Nietrudno pokazać, że* $\max M, \min M, \sup M, \inf M$ *są jedyne (o ile istnieją).*

2. [Trzy twierdzenia o punkcie stałym]

Twierdzenie 2.1. *Niech Ω będzie niepustym zbiorem uporządkowanym, $\Phi\colon \Omega \to \Omega$ i załóżmy, że:*

(α) *$x \leqslant \Phi(x)$, dla wszystkich $x \in \Omega$,*

(β) *każdy niepusty łańcuch $\Gamma \subseteq \Omega$ ma supremum.*

Wówczas Φ ma punkt stały, tj. istnieje takie $\omega \in \Omega$, że $\omega = \Phi(\omega)$.

To twierdzenie nazywane jest twierdzeniem Tarskiego o punkcie stałym przez Musielaka w [7], s. 11-12. Elementarny, choć techniczny, dowód zajmuje niecałe dwie strony. Pewnik wyboru nie jest niezbędny. Z powyższego twierdzenia, korzystając z pewnika wyboru, Musielak otrzymuje twierdzenie Hausdorffa o łańcuchu maksymalnym (które sformułujemy w paragrafie 4), z niego natomiast lemat Kuratowskiego-Zorna.

Twierdzenie 2.1 przedstawia także Bourbaki w [1], s. 37. Dowód nie jest wprawdzie podany, ale jest zamieszczona wzmianka o tym, że pewnik wyboru nie jest niezbędny do jego przeprowadzenia oraz że z pewnika wyboru i twierdzenia 2.1 można otrzymać lemat Kuratowskiego-Zorna. W kwestii Bourbakiego zob. także [2].

Kolejne twierdzenie zostało nazwane przez Dugundji i Granasa w [3], [4] twierdzeniem Knastera-Tarskiego o punkcie stałym.

Twierdzenie 2.2. *Niech Ω będzie zbiorem uporządkowanym i niech $\Phi\colon \Omega \to \Omega$ będzie funkcją rosnącą (tj. dla dowolnych $x, y \in \Omega$ z faktu, że $x \leqslant y$ wynika, że $\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$). Załóżmy, że element $b \in \Omega$ spełnia:*

- (α) $b \leqslant \Phi(b)$,
- (β) *każdy niepusty łańcuch w zbiorze $\{x \in \Omega |\ b \leqslant x\}$ ma supremum w Ω.*

Wówczas:

- (a) Φ *ma punkt stały,*
- (b) Φ *ma maksymalny punkt stały $x_0 \geqslant b$.*

(Oczywiście $x_0 \geqslant b$ oznacza, że $b \leqslant x_0$; maksymalność oznacza, że jeśli $x_0 \leqslant x_1 = \Phi(x_1)$, to $x_1 = x_0$.)

Dowód przedstawiony w [3] i [4] w celu sprawdzenia (b) jest łatwym zastosowaniem lematu Kuratowskiego-Zorna; wówczas (a) jest również prawdziwe. W rzeczywistości jednak, (a) może być udowodnione na podstawie twierdzenia 2.1 — dowód jest wówczas konstruktywny. Pokażemy to w paragrafie 3. Z drugiej strony, (b) implikuje twierdzenie Hausdorffa o łańcuchu maksymalnym (przedstawimy to w paragrafie 4), zatem dowód (b) nie używający pewnika wyboru nie jest możliwy.

Twierdzenie 2.3. *Niech Ω będzie kratą zupełną, tj. takim zbiorem uporządkowanym, że dla każdego $M \subseteq \Omega$ istnieje $\sup M$ i $\inf M$. Niech $\Phi\colon \Omega \to \Omega$ będzie funkcją rosnącą. Wówczas Φ ma punkt stały.*

To twierdzenie Tarskiego [9] w oczywisty sposób wynika z twierdzenia 2.2: Przyjmujemy $b = \sup \varnothing$, a zatem $b = \min \Omega$ — wówczas wszystkie założenia w twierdzeniu 2.2 są spełnione.

Ze wszystkich kroków opisanych powyżej moglibyśmy (rozważając konstruktywny dowód twierdzenia 2.2, część (a)) otrzymać bardzo długi, lecz konstruktywny dowód twierdzenia 2.3. Z drugiej strony, dowód Tarskiego w [9] jest krótki i elegancki. Zademonstrujemy go w ostatnim paragrafie.

Szczególny przypadek twierdzenia 2.3 to twierdzenie podane przez Knastera w [5]. W tym twierdzeniu $\Omega = \{X | X \subseteq A\}$ jest zbiorem potęgowym danego zbioru A, natomiast porządkiem w Ω jest relacja inkluzji $\subseteq$.

3. [Dowód twierdzenia 2.2, części (a)]

Przy założeniach twierdzenia 2.2 połóżmy:

$$H = \{w \in \Omega |\ b \leqslant w,\ \Phi(w) \leqslant w\},$$

$$\Xi = \{v \in \Omega |\ b \leqslant v \leqslant \Phi(v),\ v \leqslant w \text{ dla wszystkich } w \in H\}. \tag{3.1}$$

Wówczas $b \in \Xi$, a więc $\Xi \neq \varnothing$. Jest jasne, że $v \leqslant \Phi(v)$, dla wszystkich $v \in \Xi$, co stanowi warunek (α) w twierdzeniu 2.1 dla zbioru uporządkowanego Ξ (który gra tutaj rolę Ω). Bez trudności można pokazać, że $\Phi(\Xi) \subseteq \Xi$, jak również (β) z twierdzenia 2.1 dla Ξ — każdy niepusty łańcuch $\Gamma \subseteq \Xi$ ma supremum w Ξ. Twierdzenie 2.1 może być teraz zastosowane do zawężenia $\Phi|\Xi\colon \Xi \to \Xi$, mającego punkt stały

$$\underline{u} = \Phi(\underline{u}) \in \Xi. \tag{3.2}$$

Uwaga 3.2. *Dla punktu stałego $\underline{u}$ w* (3.2) *mamy $b \leqslant \underline{u}$, zatem $\underline{u} \in H$ i z* (3.1) *i* (3.2) *mamy $\underline{u} \leqslant w$ dla każdego $w \in H$. To prowadzi do wzoru $\underline{u} = \min H$, który w szczególności pokazuje, że $\underline{u}$ jest najmniejszym z punktów stałych u funkcji Φ spełniających $b \leqslant u$.*

Uwaga 3.3. *Przedstawiona tutaj metoda dowodu została zastosowana w [8] do otrzymania konstruktywnego dowodu twierdzenia Lemmerta o punkcie stałym [6], które jest uogólnieniem twierdzenia* 2.2. *Uogólnienie polega na zamienieniu założenia (β) na warunek: Każdy niepusty łańcuch w $\{\Phi(x) |\ x \in \Omega,\ b \leqslant x\}$ ma supremum w Ω. (Rzecz jasna w [8] tylko część* (a) *tego twierdzenia została pokazana w sposób konstruktywny.)*

4. [Twierdzenie Hausdorffa o łańcuchu maksymalnym jako konsekwencja twierdzenia 2.2, części (b)]

Musielak w [7] przedstawia twierdzenie Hausdorffa o łańcuchu maksymalnym w następującej formie:

Twierdzenie 4.4 (Hausdorffa). *Każdy uporządkowany zbiór E zawiera łańcuch maksymalny (tj. taki łańcuch $C_0 \subseteq E$, że dla każdego łańcucha $C \subseteq E$ mamy $C_0 \subseteq C \Rightarrow C = C_0$).*

Dla dowodu rozważmy zbiór Ω złożony ze wszystkich łańcuchów w E, uporządkowany przez relację inkluzji. Określmy $\Phi\colon \Omega \to \Omega$, $\Phi(C) := C$ dla wszystkich $C \in \Omega$. Oczywiście, Φ jest rosnąca. Mamy $\varnothing \in \Omega$, więc $b = \varnothing = \Phi(\varnothing)$ spełnia założenie (α) z twierdzenia 2.2. Nietrudno spostrzec, że każdy niepusty łańcuch $\Gamma \subseteq \Omega$ ma supremum, mianowicie $\sup \Gamma = \bigcup \Gamma \in \Omega$.

Możemy zatem zastosować część (b) twierdzenia 2.2 aby otrzymać maksymalny punkt stały C_0 $(\supseteq \varnothing)$ funkcji Φ. Ale każdy $C \in \Omega$ jest punktem stałym Φ, a więc C_0 jest łańcuchem maksymalnym.

5. [Dowód twierdzenia 2.3]

Rozważmy $M := \{v \in \Omega |\ v \leqslant \Phi(v)\}$ i jego supremum

$$\overline{u} = \sup M. \tag{5.3}$$

Dla $v \in M$ mamy $v \leqslant \overline{u}$, stąd $v \leqslant \Phi(v) \leqslant \Phi(\overline{u})$ i stąd $\Phi(\overline{u})$ jest ograniczeniem górnym M. (5.3) prowadzi zatem do

$$\overline{u} \leqslant \Phi(\overline{u}). \tag{5.4}$$

Stąd mamy $\Phi(\overline{u}) \leqslant \Phi(\Phi\overline{u}))$, a więc $\Phi(\overline{u}) \in M$ i z (5.3) $\Phi(\overline{u}) \leqslant \overline{u}$, co razem z (5.4) daje $\Phi(\overline{u}) = \overline{u}$.

[Literatura]

[1] Nicolas Bourbaki, Eléments de mathématique I: Théorie des ensembles, Fascicule de résultats. Hermann Paris 1939; wyd. 2, 1951

[2] Пografie — Nicolas Bourbaki, Macierzator 24, 6-8 (2009)

[3] James Dugundji, Andrzej Granas, Fixed point theory, I. PWN Warszawa 1982

[4] Andrzej Granas, James Dugundji, Fixed point theory. Springer New York 2003

[5] Bronisław Knaster, Un théorème sur les fonctions d'ensembles. Ann. Soc. Polon. Math. 6, 133-134 (1928)

[6] Roland Lemmert, Existenzsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen in geordneten Banachräumen. Funkcialaj Ekvac. 32, 243-249 (1989)

[7] Julian Musielak, Wstęp do analizy funkcjonalnej. PWN Warszawa 1967

[8] Alice Simon (Chaljub-Simon), Peter Volkmann, Ordinary differential equations in Banach spaces with variable order cones. World Scientific Series in Applicable Analysis 1, World Scientific Singapore, 63-70 (1992)

[9] Alfred Tarski, A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. Pacific J. Math. 5, 285-309 (1955)

[10] Koniec ze stereotypami, Ewa Siedlaczek, Macierzator 35, 10-11 (2011)

Autorzy: Marek Biedrzycki, Szymon Draga, Piotr Idzik,
Mateusz Jurczyński, Jolanta Marzec, Weronika Siwek,
Mikołaj Stańczyk, Aleksandra Urban, Peter Volkmann

[πografie– Felix Christian Klein]

1849-1925

Czy zastanawialiście się kiedyś, co czuł Albert Einstein, obchodząc urodziny w Święto Pi[1]? Czy ciekawiło Was kiedyś, czy różni „skrzywieńcy” patrzą na różne dziwne daty czy liczby w specyficzny dla siebie sposób („*Urodziłeś się trzeciego maja! To są dwie najmniejsze nieparzyste liczby pierwsze!*”)? No cóż. Poniżej zamieszczam autentyczny cytat – jedno z pierwszych zdań – z artykułu na jego temat, jaki znalazłem: *(...) podczas jego narodzin* 25 *kwietnia* 1849 *roku* ($5^2, 2^2, 43^2$ – *tylko kwadraty liczb pierwszych) (...)*. Ponoć sam Felix uwielbiał zwracać na to uwagę postronnym. No sami rozumiecie, że po czymś takim musiałem napisać πografię na jego temat.

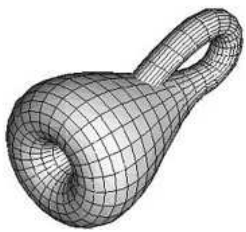
Felix Klein

Felix Klein był synem urzędnika pruskiego wysokiego szczebla i nawet jego narodziny musiały mieć w sobie coś niezwykłego – mianowicie podczas nich grzmiały armaty w walkach kończących niemiecką Wiosnę Ludów. Zapewne za kilkadziesiąt lat będzie się mówiło, że były to salwy honorowe ku jego czci. Prawdopodobnie najistotniejszym aspektem edukacji Kleina były studia na uniwersytecie w Bonn, a następnie praca jako asystent Juliusa Plückera. Zapewne to między innymi jego ogromne zainteresowanie i talent do geometrii (rozpatrywał proste w przestrzeni trójwymiarowej jako „pewną kwadrykę w przestrzeni sześciowymiarowej” – że co?) pozwoliły Kleinowi później uzyskać w tejże dziedzinie matematyki tak wspaniałe wyniki.

Tytuł profesora uzyskał w Erlangen w 1872 roku (23 lata! Czy obecnie studenci nie dostają wtedy tytułu magistra?). Uczcił to wspaniałym wykładem inauguracyjnym, dziś znanym pod nazwą Programu Erlangeńskiego. W nim to Klein zawarł swoje poglądy na temat matematyki, przedstawił swoje zdanie na temat różnych w niej teorii. Twierdził on bowiem, że dwie teorie są jednakowe, jeżeli ich „niezmienniki” posiadają te same własności – tak jak na przykład w zwykłej, szkolnej geometrii praktycznie nie odróżniamy figur podobnych, bo ich własności są takie same. Dwie teorie są identyczne, jeżeli istnieje przekształcenie (izomorfizm) nakładające jedną na drugą. Dzisiaj, w obliczu topologii, olbrzymich ogólności na każdym kroku matematyki i bardzo głębokiej w niej abstrakcji może się to nam wydawać bardzo naturalne i wręcz oczywiste. Za czasów Kleina była to rewolucja i nie wszyscy jemu współcześni zgadzali się z tymi

[1] Bo ja owszem <Forever Alone>!

poglądami. Jaskrawym tego przykładem jest jego praca *O tak zwanej geometrii nieeuklidesowej* (owszem – „tak zwanej". Ta nazwa też nie zdążyła się jeszcze w połowie XIX wieku przyjąć). W niej to Klein stwierdza, że jeśli jedna teoria ma model w drugiej, a druga w pierwszej, to jedna teoria jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy sprzeczna jest ta druga. Oczywiste, prawda? Następnie Klein konstruuje model geometrii euklidesowej w geometrii Łobaczewskiego i odwrotnie, model geometrii Łobaczewskiego w geometrii euklidesowej. No, da się to zrobić (dzisiaj wystarczy trochę czasu spędzić w Internecie, by natrafić na artykuły o tych modelach). Na tej podstawie stwierdza, że ta właśnie geometria nieeuklidesowa ma od strony matematycznej te same prawa i tę samą poprawność, co geometria euklidesowa. I to był szok. No bo jakże to tak, tu zwykła geometria, którą znamy z codziennego życia, tam – jakieś pseudogeometryczne dziwactwa. Cayley nigdy nie przyjął tych postulatów Kleina, uważając, że kręci się on w swojej argumentacji w kółko. A jednak, kleinowy sposób dowodzenia równoważności niesprzeczności różnych teorii poprzez znajdowanie modeli jest wzorcem obowiązującym do dziś.


Butelka Kleina

Ogromne zasługi ma też Klein na polu teorii grup. Pojęcie grupy za jego czasów dopiero się kształtowało i miał on okazję je poznać podczas swej wizyty w Paryżu. Tam też zaprzyjaźnił się z Sophusem Lie (grupa Kleina, grupa Liego – hej, coś tu zaczyna się zgadzać!) i, jak mówi znana anegdota, podzielił się z nim grupami, dla siebie biorąc te dyskretne, jemu zostawiając ciągłe. Nie zatracił on jednak w swych badaniach bardzo geometrycznego spojrzenia – właściwie czytając o nim wciąż natrafiamy na problemy, które rozwiązał „rozważając grupę izometrii dwudziestościanu". Zresztą, grupa Kleina (dla nas $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$[2]) była dla niego grupą symetrii prostokąta. Dodatkowo, Klein rozstrzygnął, na jakich tworach (profesjonalniej mówiąc – rozmaitościach dwuwymiarowych) można uprawiać lokalnie euklidesową geometrię. Poza oczywistą płaszczyzną mamy walec (łatwo sobie to wyobrazić – dla płaskiego ludzika żyjącego na płaszczyźnie fakt, że dwa jej daleeeeeekie końce sklejono razem nie ma żadnego znaczenia), torus (eee, no dobra, tu może być nieco ciężej to sobie wyobrazić), wstęgę Möbiusa (aaa) i butelkę Kleina [że co?!]. Jako ciekawostkę zauważmy, że za podobne prace przyznano co najmniej dwa medale Fieldsa, więc jest to naprawdę problem trudny i istotny.

[2] Co ciekawe, jest to najmniejsza niecykliczna grupa abelowa.

Butelka Kleina to w ogóle osobna, ciekawa historia. Wszyscy wiemy, jak wygląda (z grubsza) wstęga Möbiusa – bierzemy pasek papieru, skręcamy koniec o 180 stopni, sklejamy razem. A gdyby tak skleić brzegi dwóch wstęg Möobiusa? Tak, teoretycznie rzecz biorąc, wygląda butelka Kleina. W zwykłej geometrii trójwymiarowej nie da się jej utworzyć bez samoprzecięć. Dzisiaj istnieją firmy, produkujące ze szkła coś a'la butelki Kleina (ich ogólny kształt jest szeroko znany, wystarczy wpisać odpowiednią frazę w Google) – ot, gdyby koszulka ze wzorem matematycznym była dla kogoś zbyt mało ekstremistycznym wyrazem swoich zainteresowań.

O Kleinie i jego osiągnięciach można by pisać wiele. Tu skupiliśmy się głównie na tej części matematycznej, ale nie mniej zrobił dla samej dydaktyki matematyki – dość powiedzieć, że był recenzentem pierwszego kobiecego doktoratu w Niemczech. Był zresztą wybitnym wykładowcą i nauczycielem, wychowując całe pokolenie matematyków i ogólnie – ścisłowców. Dodatkowo, to on nadał pismu *Mathematische Annalen* światową rangę, którą cieszy się do dzisiaj. Gdy więc następnym razem my, jako studenci, sięgniemy po butelkę... wody mineralnej, wspomnijmy matematyka, który nawet na butelki patrzył topologicznie.

Niewinny Rosomak

[Prime curios]

Co można robić w Internecie? No, odpowiedzi jest mnóstwo, z których dziewięćdziesiąt procent można podciągnąć pod „marnować czas”. No ale można też w Internecie robić rzeczy światłe i pożyteczne, czytać o interesujących nas sprawach i pogłębiać wiedzę. To o czym może czytać matematyk? „No nie wmówisz mi, Rosomaku jeden, że w Internecie są strony z ciekawostkami matematycznymi”. No i tu Was właśnie zaskoczę. Otóż istnieje strona, na której możemy dowiedzieć się wszystkiego o wspaniałych, mnogich, pięknych i cudownych... liczbach pierwszych.

O liczbach można pisać wiele – są liczby parzyste, nieparzyste, doskonałe, Münchausena, bliźniacze... Zaraz, ile takich typów w sumie wymyślono? Odnosi się wręcz wrażenie, że na każdą, nawet najdziwniejszą własność, którą może mieć jedna tylko liczba, znajdzie się jakaś nazwa. I strona Prime Curios po trosze tę tezę potwierdza, wprowadzając wiele pojęć, ale przede wszystkim koncentrując się na wynajdywaniu dziwnych informacji i ciekawostek na temat każdej z liczb pierwszych.

Możemy więc dowiedzieć się, czym są „emirpy” - są to po prostu liczby, które po zapisaniu od tyłu dają liczby pierwsze (emirp od tyłu to prime, z ang. liczba pierwsza). Na przykład emirpem jest 31, bo 13 jest liczbą pierwszą. Niektóre emirpy są liczbami pierwszymi, niektóre nie. Najmniejszą palindromiczną liczbą pierwszą postaci „Pierwsza-jakaś cyfra - emirp” jest 13331.

Jedną z ciekawszych definicji są „usuwalne liczby pierwsze”. Usuwalne liczby pierwsze to takie, z których możemy usuwać po jednej cyfrze w jakiejś kolejności, na każdym kroku uzyskując liczbę pierwszą. Na przykład 4567 jest usuwalną liczbą pierwszą, bo $4567, 467, 67, 7$ to liczby pierwsze. Strona podaje przykład 300-cyfrowej usuwalnej liczby pierwszej... Oto i on:

72196062906190411075697304789682052965064662691398791419305808194
68693003235056315036137851472350837475985290920679625126053388015
81684234964490805070294572618497933653948906694134011361476095650
65986241637602907010291097012899099550486472805643623493673330906
2195718092 7936630003 1291883168 4212336353

Sprawdzenie jej pierwszości i usuwalności pozostawiamy czytelnikom jako ćwiczenie. :)

Na stronie możemy się też na przykład dowiedzieć, że 617 jest jedyną taką trzycyfrową liczbą pierwszą, że 617^4-2 jest pierwsza oraz $(617^4-2)^4-2$ jest pierwsza (tj. że możemy dwa razy wykonać taką operację „podniesienia do czwartej potęgi i odjęcia dwóch” i dostać liczby pierwsze); że jest 62119 liczb pierwszych, których nie da się zapisać za pomocą sum ósmych potęg, nie używając jedynek – największą z tych liczb jest 6518557, że sama 62119 też jest pierwsza...

Strona dostarcza też informacji o liczbach nie pierwszych, ale mających pewne interesujące własności z liczbami pierwszymi powiązane – i tak, 188 można rozłożyć na sumę liczb nieujemnych całkowitych na dokładnie 1398341745571 sposobów i ta liczba jest pierwsza, dodatkowo 188 jest największą znaną liczbą, którą da się przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych na dokładnie pięć sposobów (polecamy się zastanowić, jakie to sposoby).

Niektóre liczby mają swoją historię, która również jest przytaczana w odpowiednich artykułach. W artykule o liczbie 5777 możemy na przykład dowiedzieć się o mniej znanej hipotezie Goldbacha – przypuszczał on mianowicie, że każdą liczbę nieparzystą można zapisać w postaci $p+2a^2$, gdzie p jest liczbą pierwszą lub jedynką, zaś a może być zerem. 5777 jest jednym z dwóch znanych kontrprzykładów na tę hipotezę. Tak – na tę hipotezę znane są jedynie *dwa* kontrprzykłady, pomimo łatwości (wydawałoby się), z jaką można by zaprząc komputer do produkowania liczb niespełniających tego warunku.[3]

---

[3]Znając życie, po prostu nikt nie wpadł na to, by odpowiedni program napisać, ale ćśśś!

Prime Curios to strona zbudowana trochę na zasadzie Wikipedii, do której można dodawać swoje wpisy (oczywiście, na temat interesujących liczb), które następnie pojawiają się po uprzedniej weryfikacji przez moderatorów. W jaki sposób weryfikują oni takie tezy, jak np. fakt, że liczba utworzona ze 181 cyfr, z których 180 to siódemki i jest tylko jedna jedynka w „środku" (tzn. liczba postaci „7777...77177...7777") jest pierwsza – nie mam pojęcia. Dodatkowo, 181 jest najmniejszą palindromiczną liczbą pierwszą, która jest sumą trzech kolejnych emirpów $(37, 71, 73)$. Co najciekawsze, jest to też najmniejsza możliwa liczba Goedla, którą może otrzymać zdanie „A jest logicznie równoważne A" (co ma twierdzenie Goedla do ciekawostek liczbowych?! Teraz już wiecie!).

Czy więc ta stronka jest matematycznym objawieniem i powinna wejść w zakładki każdego szanującego się matematyka? Czy może to tylko matematyczna wersja Kwejka czy Demotywatorów, pożeraczy czasu, które można poczytać, z których można się pośmiać, ale lepiej nie za długo?[4] To już Wasza decyzja!

Niewinny Rosomak

[Krok bliżej do miliona]

czyli recenzja książki „Obsesja liczb pierwszych" Johna Derbyshire'a

Liczby pierwsze były źródłem fascynacji matematyków od starożytności. Już Euklides dowiódł, że jest ich nieskończenie wiele, jednak ani jemu, ani wielu jego następcom nie udało się znaleźć wzoru pozwalającego dokładnie przewidzieć rozmieszczenie wszystkich liczb pierwszych. Kluczem do rozwiązania zagadki może być hipoteza Riemanna (HR), ósmy problem na liście Hilberta, najprawdopodobniej największa nierozwiązana do tej pory sprawa w matematyce. Oto, jak brzmi ta hipoteza:

Wszystkie nietrywialnie zera funkcji dzeta Riemanna mają część rzeczywistą równą $\frac{1}{2}$.

No dobrze, ale co to właściwie znaczy? Co ta hipoteza ma wspólnego z liczbami pierwszymi? Odpowiedź na to pytanie możemy znaleźć w książce *Obsesja liczb pierwszych.* Autor postawił sobie trudne zadanie z dwóch powodów: po pierwsze, sama HR jest bardzo obszernym tematem, zahacza bowiem o różne obszary matematyki i fizyki, m. in. o teorię liczb, algebrę, analizę zespoloną oraz mechanikę kwantową. Trudno jest wyobrazić

[4] Czy ja właśnie porównałem Kwejka i Demotywatory do strony o liczbach pierwszych?

sobie książkę, która pozwoliłaby gruntownie zgłębić tę tematykę. Po drugie, autor już na początku zaznacza, że chce w przystępny sposób zapoznać czytelnika z HR prawie bez użycia analizy – tak, żeby treść książki była zrozumiała również dla „nie-matematyków" (we wstępie pojawia się definicja tego pojęcia). I rzeczywiście, zagadnienie zostało opowiedziane w najprostszy możliwy sposób. Autor stopniowo wyjaśnia poszczególne pojęcia i łagodnie prowadzi nas przez wszystkie zagadnienia tak, żebyśmy mogli zrozumieć ogólną ideę HR bez wikłania się w szczegóły.

Oczywiście taki sposób prezentowania ma też swoje wady. Czytelnik wtajemniczony w różne zagadnienia matematyczne może się trochę nudzić na początku, kiedy autor musi wyjaśnić elementarne rzeczy z analizy. To jednak nie jest problem, można szybko przeskoczyć do dalszej części. Z drugiej strony pod koniec książki autor nie wyjaśnia szczegółowo wszystkich kroków, tylko podaje pewne fakty gotowe – bez pokazania, dlaczego tak się dzieje. To zrozumiałe, że wszystko nie może zostać wytłumaczone, jeśli pomysłodawca chce przedstawić tylko zarys problemu. Niektórzy czytelnicy mogą mieć jednak wrażenie, że parę wzorów i równań więcej pozwoliłoby im lepiej zrozumieć zagadnienie.

Należy więc otwarcie powiedzieć, że książka nie jest łatwą lekturą, którą można przeczytać w dwie godziny. Wymaga skupienia i pewnego zaangażowania od czytelnika, zwłaszcza jeśli zna on matematykę tylko na poziomie elementarnym. Jednak wytrwałych czeka nagroda. Lektura z pewnością pozwoli przybliżyć sobie treść jednego z problemów milenijnych i być może wielu zachęci do sięgnięcia po inne książki i artykuły na ten temat?

W przerwie między jednym a drugim zagadnieniem poznajemy interesujące rzeczy na temat osób, które przyczyniły się do powstania Twierdzenia o Liczbach Pierwszych i HR. Nie zabrakło też miejsca na zabawne anegdoty i ciekawostki. I tak wdrażając nas w główną ideę, autor opisuje życie Bernharda Riemanna i tło historyczne. Oprócz tego w książce przewijają się takie nazwiska jak: Euler, Gauss, Dedekind, Dirichlet, Czebyszew, Gilbert, Hardy, Turing, Weil, Kramer czy Bernoulli.

Podsumowując, trudno nam będzie znaleźć książkę, która w bardziej przystępny sposób opisze nam hipotezę Riemanna. I warto ją przeczytać – w końcu wypadałoby wiedzieć coś niecoś o największym nierozwiązanym problemie w matematyce. Książka Johna Derbyshire'a pozwoli nam zrobić ten pierwszy krok.

Ewa Siedlaczek

[\begin{document}]

czyli jak napisać pracę i nie zwariować

Wraz z rozpowszechnieniem narzędzi sprawdzających pisownię zdecydowanie zmniejszył się problem literówek i błędów ortograficznych w dokumentach przygotowywanych na komputerze. Nakładki oferowane przez zdecydowaną większość programów do edycji tekstu sprawiły, że najbardziej rzucające się w oczy byki zostały wyeliminowane — chodź po mimo dobrych intencji komputer morze nie poradzić sobie na przykład z homonimami. Niestety, bardziej skomplikowana jest sprawa interpunkcji.

Największe problemy zdają się sprawiać przecinki, mimo że każdy z pewnością zna cały szereg reguł dotyczących miejsc, w których należy je stawiać, i tych, w których nie powinno ich być. Przecinek postawimy zatem przez słowem *który* lub *że*, a pod żadnym pozorem nie użyjemy go przed *i*. Cofnijmy się jednak na początek akapitu — zdaje się, że w jego pierwszym zdaniu złamaliśmy wszystkie wymienione przed chwilą reguły. O dziwo, jest ono najzupełniej poprawne pod względem interpunkcji.

Skąd bierze się ta rozbieżność? Najczęściej wynika ona z tego, że zasady, które chcielibyśmy zastosować, w rzeczywistości… nie istnieją. Regułki dotyczące stawiania bądź niestawiania przecinków przed pewnymi słowami ze względu na swoją uproszczoną naturę nierzadko wprowadzają w błąd. Ich pełne zrozumienie wymaga pewnej wiedzy z zakresu składni, ale także — co powinno ucieszyć matematyków -– logicznego myślenia. Niezbędna okazuje się również znajomość tego, co popularnie nazwalibyśmy „wyjątkami”, a co w rzeczywistości okazuje się być zbiorem bardziej szczegółowych reguł.

Ze względu na liczbę źródeł, w których można zasięgnąć fachowej porady, w tym artykule nie znajdziecie dosłownie cytowanych regułek dotyczących interpunkcji. Ograniczymy się do wymienienia kilku najczęściej popełnianych i najbardziej rażących błędów. W tym odcinku cyklu skupimy się na dwóch wymienionych wcześniej problemach: stawiania przecinka przed *i* oraz braku przecinka przed *że.*

1. Przecinek przed *i*

Zaskakująco popularne przekonanie o bezwzględnym zakazie stawiania przecinka przed *i* (oraz innymi spójnikami) wyjątkowo często prowadzi do błędów interpunkcyjnych. Przyjrzyjmy się kilku sytuacjom, w których przecinek przed *i* stawiać nie tylko można, ale i trzeba.

Nauka algebry jest i przyjemna, i pożyteczna.

Być może tak kwiecistej prozy nie będziemy używać zbyt często przy pisaniu prac naukowych, jednak warto wiedzieć, że przecinek stawiamy przed powtórzonymi spójnikami, które pełnią taką samą funkcję. Warto tutaj podkreślić, jak istotny jest tutaj ten drugi warunek -– dodatkowego przecinka nie umieścimy na przykład w zdaniu *Siedzę i czytam o całkach i różniczkach.*

Skończyłam pisać artykuł, który okazał się dość długi, i wyszłam na spacer.
Skończyłam pisać artykuł, i to bynajmniej nie krótki.

Zdania podrzędne i wtrącenia wydzielamy przecinkami, a ich bliskie sąsiedztwo ze spójnikiem *i* bynajmniej nie znosi tej zasady.

Zaczęła się sesja egzaminacyjna, i wzięli się do nauki.

Ten — bardzo aktualny — przykład może budzić najwięcej kontrowersji, jednak zasługuje na przytoczenie, zwłaszcza że pojawia się w *Wielkim słowniku ortograficznym* PWN-u. W powyższym zdaniu spójnik występuje w funkcji wynikowej — można zastąpić go przez *więc*, w związku z czym dopuszcza się postawienie przed nim przecinka.

2. Przecinek przed *że*

Mimo że przed *że* stawiamy przecinek, gdy pełni ono funkcję spójnika wprowadzającego zdanie podrzędne, musimy pamiętać, że nie zawsze pełni ono tę rolę – a przynajmniej nie zawsze pełni ją samodzielnie.

Mimo że nie rozwiązałem ostatniego zadania, zdałem egzamin.
Powinieneś przyjść na wykład, zwłaszcza że jest obowiązkowy.
Egzamin nie sprawi ci problemu, tym bardziej że długo się na niego uczyłaś.

W przypadku wyrażeń takich jak *mimo że*, *chyba że*, *zwłaszcza że*, *pomimo że* przecinek stawiamy przed całą konstrukcją (zasada ta nosi czasem nazwę cofania przecinka). Zauważmy jednak, że w zależności od tego, w jaki sposób chcemy rozłożyć akcenty, ostatnie zdanie można zapisać również jako *Egzamin nie sprawi ci problemu tym bardziej, że długo się na niego uczyłeś.* Ma ono jednak wówczas nieco inne znaczenie.

Nie stawiamy przecinka również wtedy, gdy miałby on rozdzielać dwa sąsiadujące ze sobą spójniki, a zatem w zdaniach typu:

Powiedziałam, że lubię topologię i że nie sprawia mi ona problemu.
Liczyliśmy na to, że kolokwium się nie odbędzie lub że będzie proste.

Jak widać, większości zasad, które część ludzi uznaje za pewnik, nie można stosować bezmyślnie. Na szczęście dokładne zasady polskiej interpunkcji można bez problemu znaleźć w słownikach ortograficznych, przeróżnych poradnikach, a także w internecie. Przy korzystaniu z tego ostatniego źródła sugerowałabym jednak raczej używanie stron, których merytoryczna poprawność nie budzi wątpliwości — na przykład słownika ortograficznego udostępnianego przez PWN (http://so.pwn.pl/). Samodzielna lektura zawartych w nim zasad interpunkcji pozwoli nam nie tylko na uniknięcie błędów, ale także na precyzyjne komunikowanie się z otoczeniem. Usunięcie przecinka w zdaniu *Nie, czekajcie na mnie* zmienia przecież całkowicie jego sens. Jak widać, umiejętne stawianie przecinków to nie tylko kwestia używania poprawnej polszczyzny, ale również sposób na uniknięcie nieporozumień.

Magda

[Sprawozdanie z XXX wyjazdowej sesji KNM]

Tegoroczny weekend majowy w końcu nam przypasował, pozwalając zorganizować nieco dłuższą sesję. Ośrodek udało się zarezerwować, ekipę uczestników – zebrać, referaty przygotować. Pozostawało tylko przyjechać i pokazać Szczyrkowi, gdzie matematycy spędzają początki wiosny!

Poza długością, majowa sesja wyróżniła się rekordowo niską liczbą jadących wspólnie pociągiem Kołowiczów (bo było nas jedynie pięcioro). Reszta uczestników bądź to dołączyła w trakcie drogi, bądź dojechała pociągiem osobnym, a w większości ludziska pozajeżdżali samochodami. Takie się z nas zmotoryzowane towarzystwo robi. Pociągowicze i tak byli na miejscu wcześniej niż jedna z ekip samochodowych – i to niestety ta najważniejsza, bo z jedzonkiem. No ale cóż, brzuchy nasze zdyscyplinowane przetrzymały tę próbę i zdołaliśmy dotrwać do wieczora i zaplanować resztę sesji, łącznie ze stworzeniem grasującego Zbrodniciela.

Jednym z komfortów sesji dłuższych jest to, że referaty nie zajmują stu procent czasu – i tak, korzystając z pięknej pogody, zdecydowaliśmy się poświęcić znakomitą większość soboty na wycieczkę górską (tj. większość z nas się na to zdecydowała ;)). Relaks na Klimczoku i pomarańcze wysokogórskie dały nam siłę i werwę, które pozwoliły nam być najświeższymi na wieczornym referacie Szymona Dragi (lekko podwędzonego szczyrkowskim słońcem) pod tytułem „Patologiczne twierdzenie o zbiorach odległości”, który to referat otworzył od strony oficjalnomatematycznej naszą XXX sesję.

Na tej to sesji również w gronie Kołowiczów zadebiutował Wiochmen Rejser, którego śmiało mogę nazwać alternatywą do Banga. Mamy więc już dwie gry, w sumie mogące zaangażować naraz jedenaście osób – jeszcze ze dwie takie i każdy wieczór każdej sesji będziemy mogli solidarnie spędzić na „szpilach”. :) Pierwszy wieczór minął nam zatem pod znakiem

BANGowych rewolwerów, Wiochmenowych flaszek (i wielu wesołości z odkrywania historii gry, jej zasad i tekstów na kartach) oraz pysznych ciast, zapewnionych przez Darię Morys.

Rano jednak trzeba było wstać i zmierzyć się ze smutną koniecznością zrezygnowania z niedzielnego wypadu w góry z powodu deszczu – trzeba jednak przyznać, że obfitość gier w ośrodku nie pozwoliła nam się tym faktem zbytnio przejmować. ;) Wieczorem wysłuchaliśmy kolejnych referatów – Marek Biedrzycki opowiedział nam o paradoksach w logice, zaś Weronika Siwek przybliżyła wszystkim znany w ogólności, ale nikomu w szczegółach paradoks Banacha-Tarskiego. Na zakończenie wieczoru doktor Rafał Kucharski ujawnił przeznaczenie tajnych ankiet, którymi nas raczył przez całą dotychczasową część sesji – i jakkolwiek w wielu punktach żelazna matematyczna logika i geniusz każdego z członków Koła nie pozwolił referentowi uzyskać spodziewanych patologicznych statystycznie wyników (ha, ha, ha!), to raz... albo dwa... no, maksimum trzy daliśmy się złapać w chytre pułapki rachunku prawdopodobieństwa. Doktor jednak postarał się, by nikt nie poszedł spać z przeświadczeniem „Ale ja głupio gram na loteriach" (pomimo obfitości dowodów, że właśnie tak jest). Przed pójściem spać udało nam się jeszcze zaaranżować partyjkę Psychologa, której ponad połowa minęła na dywagacjach o różnych dziwnych konfiguracjach personalnych w różnych, hmmm, dość prywatnych sytuacjach – dość powiedzieć, że słowo „Mechanożółw" przewijało się stanowczo za często jak na zwykłą, stateczną rozmowę matematycznego towarzystwa.

I przyszedł poniedziałek, oficjalny dzień referatów. Uzbroiliśmy się w kawę, ciastka, napoje, owoce, życzliwość i siłę, by wysłuchać Mateusza Jurczyńskiego, który opowiedział o dużych zbiorach miary zero, bardzo nieciągłych funkcjach z własnością Darboux i generalnie pokazał, jak to z „prawie" w matematyce trzeba uważać. Po nim Daria Morys przybliżyła nam zagadnienie przestrzeni Apperta, by już na pewno nikt nigdy nie pomyślał, że normalność i lokalna zwartość przestrzeni topologicznych są w jakiś sposób powiązane. Wybiła godzina jedenasta, a wraz z nią przybyli nasi szanowni goście – profesor Tomasz Połacik z Uniwersytetu Śląskiego oraz Adam Wegert, student AGH w Krakowie. Z uwagą wysłuchaliśmy referatu Tomka Kani o mieszanych przestrzeniach Tsirelsona, po czym oddaliśmy głos naszym gościom właśnie. Profesor opowiedział nam, jak antyczne logiczne problemy wpływały na matematykę, prowadząc nas od paradoksu kłamcy aż do twierdzeń Goedla, zaś Adam przybliżył nam, jak by to było gdyby się miarę na przestrzeni nieskończeniewymiarowej wprowadziło (czyli nijak, bo się tego "ładnie" zrobić nie da). Po małej obiadowej przerwie (no dobra, trochę większej) przyszła pora na referat Piotrka Idzika o funkcji trzynastkowej, czyli jak skonstruować patologię bez Pewnika Patologii, czy też pewnika wyboru, jak go niektórzy nazywają. Po nim nasz opiekun, doktor Tomasz Kochanek, przybliżył nam problem Schroedera-Bernsteina, tworząc nową teorię lewostronnych izomorfizmów (dość nieciekawą, bo nie ma w niej wiele miejsca dla funkcji pustych, ale co ja tam wiem) i skutecznie naginając, dewastując, wyrzucając do kosza lub w inny sposób modyfikując wszystkie intuicje, jakie mogliśmy mieć na temat zagadnienia „podobieństwa całości do kawałka". Część referatową zakończyła Jolanta Marzec, konstruując nam na płaszczyźnie zbiór Bernsteina i opowiadając o jego zaskakujących własnościach.

Cóż, by oficjalnościom stało się zadość, wypadało jeszcze wybrać najlepszy referat i przygotować temat na następną sesję. Zwycięzcą pierwszego głosowania został, z dość miażdżącą przewagą, doktor Tomasz Kochanek. Tematem następnem sesji zostały natomiast „Motywacje, intuicje i konstrukcje matematyczne". Jak to już zostało załatwione, mogliśmy z ochotą oddać się inszym rozrywkom – garstka nas dała się domordować Tomkowi Kani, część rzucała się flaszkami po wozach, część strzelała do siebie zza beczek. Normalna szczyrkowska sesja.

I choć w czasie tej sesji okazało się, żeśmy żarłoki i pijoki nieprzeciętne, choć wiele wycieczek do sklepu po chleb i po picie nas czekało, choć po raz pierwszy dowiedliśmy w czasie sesji twierdzenia za pomocą napisania programu, choć potoczyło się wiele rozmów na wielorakie tematy, choć wyszło na jaw, że nie powinniśmy grać na loteriach, choć aż dwa razy do ośrodka przyjeżdżała pizza, choć druga część sesji minęła w strugach deszczu, choć Basia mogła z nami być tylko kawałek sesji, choć Weronika z Markiem musieli nas na jeden cały dzień opuścić, choć o tej sesji wiele można by jeszcze opowiadać – najwyższa pora zakończyć to sprawozdanie słowami: było super! Czekamy na listopad. :)

Niewinny Rosomak

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelny: Mateusz Jurczyński
Sekretarz redakcji: Joanna Zwierzyńska

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

macierzator@knm.katowice.pl.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: *www.knm.katowice.pl.*

maj – czerwiec 2011

[Kącik TEXowy część 2]

układ graficzny strony, odstępy poziome i pionowe oraz pudełka

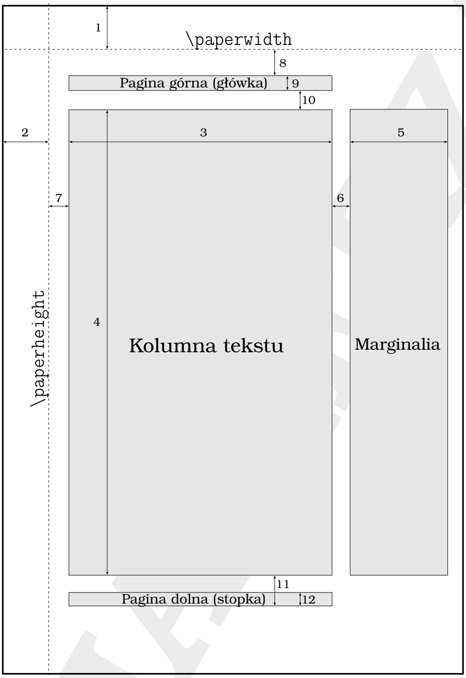
W tej części pokażemy jaki jest standardowy układ graficzny strony w LATEXowym dokumencie oraz w jaki sposób możemy go zmienić. Następnie kilka słów o łamaniu wierszy i stron oraz wstawianiu odstępów. Powiemy również czym są pudełka oraz jakie są ich rodzaje.

Beata Łojan

[Parametry układu strony]

Typowa strona składa się z paginy górnej i dolnej, marginaliów i kolumny tekstu. W zależności od klasy i wymiaru papieru LATEX ustawia domyślne wielkości wszystkich parametrów. Na poniższym rysunku zaznaczono poszczególne elementy oraz polecenia opisujące ich długości.

Układ graficzny strony



1. 1cal + \voffset
2. 1cal + \hoffset
3. \textwidth
4. \textheight
5. \marginparwidth
6. \marginparsep
7. \oddsidemargin \evensidemargin
8. \topmargin
9. \headheight
10. \headsep
11. \footskip
12. \footheight

Wartości domyślne dla `a4paper` w `article`

```
\paperwidth=597pt
\paperheight=845pt
\textwidth=345pt
\textheight=598pt
\marginparwidth=57pt
\marginparsep=11pt
\voffset=0pt
\hoffset=0pt
\oddsidemargin=53pt
\topmargin=17pt
\headheight=12pt
\headsep=25pt
\footskip=30pt
```

Możemy zmienić wielkości poszczególnych parametrów, korzystając z poleceń `\setlength{parametr}{długość}`, które *zmienia* wielkość parametru na długość lub `\addtolength{parametr}{długość}`, które *zwiększa* dany parametr o określoną długość. Ponadto wszystkie parametry możemy również zmienić korzystając z pakietu `geometry`[1].

[1] Pakiet do zmiany parametrów strony. Będzie omówiony w jednej z kolejnych części.

[Zdanie, akapit, strona]

Akapit jest podstawową jednostką logiczną tekstu złożoną z kilku zdań, zawierającą jedną spójną myśl czy opis pojęcia. Akapity wyróżniamy poprzez wcięcie w tekście.

Nowy akapit rozpoczynamy pustym wierszem lub instrukcją `\par`. Wcięcie akapitowe uzyskujemy wstawiając `\indent`[2] na początku wiersza, by uzyskać akapit bez wcięcia korzystamy z polecenia `\noindent`.

Przetwarzając tekst, LaTeX sam wybiera miejsca złamania wierszy oraz stron. Jeśli zrobi to w innym miejscu niż chcemy, to możemy wskazać mu miejsce, w którym ma zakończyć wiersz lub stronę.

Łamanie wiersza i strony

❶ `\newline` lub `\\` – rozpoczyna nową linię bez wcięcia akapitowego
❷ `\\*` – zakazuje złamania strony w miejscu złamania wiersza
❸ `\linebreak[l]` i `\nolinebreak[l]` – nakaz i zakaz złamania wiersza
❹ `\newpage` – rozpoczyna nową stronę lub kolumnę (opcja `twocolumn`)
❺ `\pagebreak[l]` i `\nopagebreak[l]` – nakaz i zakaz złamania strony
❻ `\clearpage` – rozpoczęcie nowej strony na dowolnej stronie
❼ `\cleardoublepage` – rozpoczęcie nowej strony na stronie nieparzystej[3]

Nieobowiązkowy argument $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ określa jak bardzo zakazujemy/nakazujemy LaTeXowi złamać wiersz (stronę). Wartość domyślna to 4 i oznacza bezwzględny zakaz/nakaz złamania wiersza (strony).

Gdy użyjemy poleceń typu `new`, pozostałą część wiersza (strony) LaTeX wypełni odstępem, w poleceniach typu `break` będzie starał się wypełnić tekstem cały wiersz (stronę) wstawiając dodatkowe odstępy.

Instrukcje `\newpage` i `\clearpage` w składzie jednokolumnowym są sobie równoważne. Rożnica widoczna jest w przypadku składu dwukolumnowego, wtedy `\newpage` kończy kolumnę, a `\clearpage` kończy stronę i w razie potrzeby zostawia pustą prawą kolumnę.

[Odstępy]

Jedna spacja ma dla LaTeXa takie same znaczenie jak wiele spacji, analogicznie jest z pustymi wierszami. Ignorowane są również odstępy na początku linii oraz po LaTeXowych komendach.

Wielkość odstępu podajemy w postaci liczby wraz z jednostką[4]. Możemy też użyć odstępów „elastycznych”. Odległości zapisujemy wtedy w postaci *n* `plus` *p* `minus` *m*. Przykładowo zapis `3cm plus 0.5cm minus 1cm` oznacza, że normalny odstęp ma wynosić 3 cm i może on zostać zwiększony o 0,5 cm lub zmniejszony o 1 cm.

Jednostki długości

`1pt` = ⊔, `1mm` = ⊔, `1ex` = ⊔, `1em` = ⊔, `1cm` = ⊔, `1in` = ⊔

[2] Chcąc uzyskać wcięcie w akapicie po tytule rozdziału należy dołączyć pakiet `indentfirst`.
[3] Wprzypadku opcji `openany` komendy `\clearpage` i `\cleardoublepage` dają taki sam efekt.
[4] `in` (cal) = 25,4 mm, `pt` (punkt) $\approx \frac{1}{72}$ cala $\approx \frac{1}{3}$ mm, `em` = szer. litery M, `ex` = wys. litery x.

Odstępy między wyrazami, czyli *odstępy poziome*, możemy uzyskać wstawiając `\hspace{odległość}` lub `\hspace*{odległość}` w przypadku, gdy chcemy wstawić odstęp na początku lub na końcu wiersza, gdzie *odległość* oznacza wielkość wstawianego odstępu. Do wstawienia takiego odstępu możemy również użyć instrukcji `\hskip odległość`, np. `\hskip2cm`. Instrukcją `\hfill` uzyskujemy maksymalny możliwy odstęp poziomy. Polecenie to powoduje, że zawartość linii zostaje rozmieszczona od lewego do prawego marginesu, a przerwa wypełniana jest spacjami. Podobny efekt uzyskamy instrukcjami `\dotfill` oraz `\hrulefill`, które wypełniają powstałą przerwę odpowiednio kropkami i linią ciągłą.

Odstępy poziome

`\quad` = 1em ␣, `\qquad` = 2em ␣␣
`\,` = 3/18 odstępu `\quad`
`\:` = 4/18 odstępu `\quad`
`\;` = 5/18 odstępu `\quad`
`\!` = −3/18 odstępu `\quad`

`lewy \dotfill środek \hfill środek \hrulefill prawy`

lewy .... środek   środek ________________ prawy

Z analogicznych instrukcji możemy skorzystać w przypadku wstawiania *odstępów pionowych*, czyli odstępów między wierszami i akapitami.

Odstępy pionowe

`\smallskip` – dodaje odstęp 3pt
`\medskip` – dodaje odstęp 6pt
`\bigskip` – dodaje odstęp 12pt

Odstęp możemy wstawić instrukcją `\vspace{odległość}` lub `\vspace*{odległość}` jeśli chcemy wstawić odstęp na początku lub na końcu strony oraz poleceniem `\vskip odległość`. Instrukcje te należy oddzielić od tekstu pustym wierszem. Instrukcja `\vfill` wstawia maksymalny możliwy odstęp w pionie, powodując, że zawartość strony zostaje rozmieszczona od górnego do dolnego marginesu. Odstęp między dwoma wierszami lub między wierszami tabeli możemy również uzyskać poleceniem `\\[odległość]`.

[Pudełka]

Pudełko jest traktowane przez LaTeXa jako całość i w trakcie przetwarzania dokumentu ma dla niego takie samo znaczenie jak pojedyncza litera, dlatego też LaTeX nie podzieli pudełka między wiersze czy strony. Wyróżniamy pudełka akapitowe, wierszowe i pudełka linii.

Pudełek wierszowych możemy używać np. gdy nie chcemy podzielić wyrazu lub fragmentu tekstu na wiersze. Uzyskujemy je poleceniem:

`\makebox[szer][poz]{tekst}` lub `\mbox{tekst}`

gdzie *szer* oznacza szerokość pudełka[5], *poz* określa położenie tekstu i może przyjmować jedną z wartości: `c` – wyśrodkowanie, `l` – dosunięcie do lewej, `r` – dosunięcie do prawej, `s` – rozstrzelenie zawartości po całym pudełku, a *tekst* to zawartość pudełka.

[5] Może być ona mniejsza lub większa od zawartego w nim tekstu. Szerokość pudełka może być również zerowa lub przyjmować wartość ujemną.

Analogicznie do `\makebox` działa instrukcja

`\framebox[szer][poz]{tekst}` lub `\fbox{tekst}`

która dodatkowo tworzy ramkę dookoła pudełka. Grubość ramki możemy zmienić za pomocą polecenia `\fboxrule=wartość`, a jej odległość od tekstu poprzez `\fboxsep=wartość`.

Efekt przesuwania pudełek w pionie uzyskujemy poleceniem:

`\raisebox{przesunięcie}[wysokość][głębokość]`

gdzie *przesunięcie* to wielkość przesunięcia w górę (dla wartości dodatniej) lub w dół (dla wartości ujemnej).

pudełka.pdf

wyśrodkowany

żuk, jeż, osa

ujemna długość

Domyślne wartości

Pudełko z ramką

To jest za małe

`\fboxrule=3pt` `\fboxsep=1.5ex`

Spa a d a m i do góry

MACIERZATOR

pudełka.tex

```
\makebox[5cm][c]{wyśrodkowany}
\makebox[5cm][s]{żuk, jeż, osa}
ujemna \makebox[-0.2cm]{długość}
\mbox{Domyślne wartości}
\framebox[5cm][r]{Pudełko z ramką}
\framebox[.8cm][l]{To jest za małe}
\raisebox{0pt}[0pt][0pt]{Spa
\raisebox{-0.7ex}{a}
\raisebox{-1.1ex}{d}
\raisebox{-1.5ex}{a}
\raisebox{-1.9ex}{m}
\raisebox{0pt}{i do góry}}
\framebox[5cm][c]{\fboxrule=2pt
\framebox[4.9cm][c]{
MACI\raisebox{-0.4ex}{E}RZATOR}}
```

W pudełkach o zadanej szerokości możemy umieszczać również akapity. Umożliwia nam to instrukcja `\parbox` oraz otoczenie `minipage`

`\parbox[poz]{szer}{tekst}`

`\begin{minipage}[poz]{szer} tekst \end{minipage}`

gdzie *poz* określa pozycję pudełka względem otaczającego je tekstu i może przyjmować jedną z wartości `c` – środek wysokości pudełka na linii podstawowej, `t` – górna krawędź pudełka na linii podstawowej, `b` – dolna krawędź pudełka na linii podstawowej, *szer* określa szerokość pudełka, a *tekst* to jego zawartość. W odróżnieniu od wcześniej omówionych pudełek, polecenie `\parbox` i środowisko `minipage` pozwalają na dzielenie tekstu na linijki.

Do rysowania pionowych i poziomych kresek możemy użyć polecenia

`\rule[przesunięcie]{szer}{wys}`

gdzie *przesunięcie* określa położenie kreski względem linii podstawowej, a *szer* i *wys* oznaczają odpowiednio szerokość i wysokość linii. Kreskę o zerowej szerokości nazywamy *podporą*.

✻ ✻ ✻