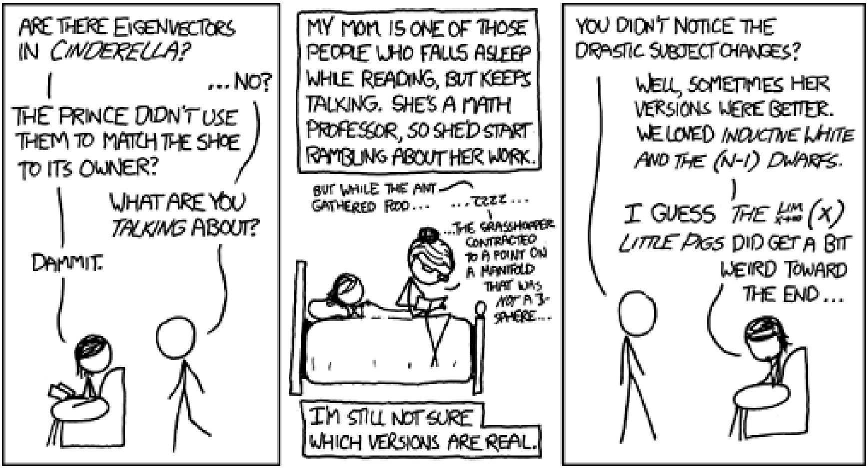
[MACIERZATOR52]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



źródło: `http://xkcd.com/872/`

Witamy w styczniowym numerze [MACIERZATORa]!

Oddajemy w Państwa ręce pierwszy w tym roku kalendarzowym numer naszego miesięcznika. Proponujemy w nim artykuł, w którym opowiadamy o eulerowskim interpolowaniu silni; piszemy o „Pokerze z Pitagorasem” Marcusa du Sautoya oraz przedstawiamy kolejną część *Kącika TEXowego*, a w nim – kilka słów o dołączaniu grafik oraz kolorowych dokumentach.

Zbliża się sesja egzaminacyjna – studentom życzymy powodzenia, a wszystkim – dobrego, spokojnego roku 2013!

Redakcja

ISSN 2083-9774

[Interpolacja silni]

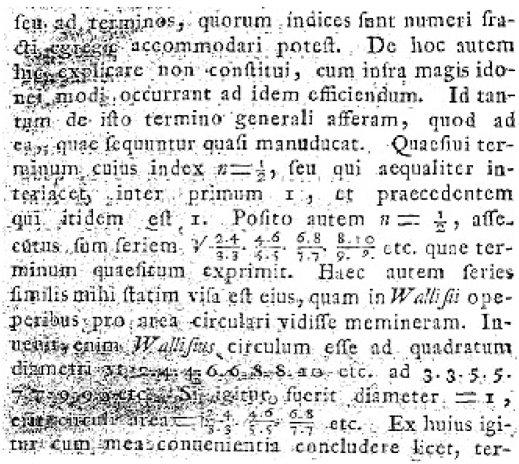
W 1728 roku, gdy Leonhard Euler zawitał do Petersburga, Daniel Bernoulli i Christian Goldbach pracowali nad „interpolowaniem” sekwencji liczbowych – znajdowaniem wzorów ogólnych znanych ówcześnie ciągów liczbowych za pomocą różnych metod analitycznych. O ile nietrudno uciąglić sekwencje typu 1, 3, 6, 10, 15, ... do postaci ogólnej i dobrze określonej na całym zbiorze liczb zespolonych $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$, o tyle ciężkim orzechem do zgryzienia okazał się znany ciąg[1]: $n!$. Zagadnienie można postawić w sposób następujący:

> Znaleźć funkcję różniczkowalną określoną na możliwe największym podzbiorze $\mathbb{C}$ spełniającą następujące warunki:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x+1) = xf(x) \end{cases} \tag{1}$$

Niedługo po zapoznaniu się z problemem, Euler przedstawił Christianowi Goldbachowi rzeczoną sekwencję w postaci poniższej granicy:

$$n! = \lim_{k\to\infty} k^n \left(\frac{1}{1+n} \cdot \frac{2}{2+n} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k+n} \right) \tag{2}$$


ſeu ad terminos, quorum indices ſunt numeri fracti, egregie accommodari poteſt. De hoc autem hic explicare non conſtitui, cum infra magis idonei modi occurrant ad idem efficiendum. Id tantum de iſto termino generali afferam, quod ad ea, quae ſequuntur quaſi manuducat. Quaeſiui terminum cuius index $n = \frac{1}{2}$, ſeu qui aequaliter interiacet inter primum 1, et praecedentem qui itidem eſt 1. Poſito autem $n = \frac{1}{2}$, aſſecutus ſum ſeriem $\sqrt{\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdot\frac{8.10}{9.9}}$ etc. quae terminum quaeſitum exprimit. Haec autem ſeries ſimilis mihi ſtatim viſa eſt eius, quam in *Walliſii* operibus pro area circulari vidiſſe memineram. Inuenit enim *Walliſius* circulum eſſe ad quadratum diametri [illegible] 4. 6. 6. 8. 8. 10 etc. ad 3. 3. 5. 5. 7. 7. 9. 9. etc. Si igitur fuerit diameter = 1, erit circuli area = [illegible] $\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdot\frac{6.8}{7.7}$ etc. Ex huius igitur cum mea conuenientia concludere licet, ter-

Rysunek 1: Euler objaśnia wzór Wallisa [1].

[1] Drugim niełatwym zadaniem okazało się znalezienie wzoru ogólnego na sumę częściową ciągu $\dfrac{1}{n}$.

Wyznaczenie wartości tego produktu dla n całkowitych nie stanowi problemu, lecz interesujące właściwości zaczynają się ujawniać dopiero dla n niecałkowitych. Biorąc $n = \frac{1}{2}$, Euler otrzymał po przekształceniach następującą sekwencję:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)!\right]^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \ldots = \frac{\pi}{4} \quad (?!)$$

Ten produkt był znany Eulerowi – jest to wzór Wallisa opisujący rozwinięcie π w iloczyn nieskończony. Zatem, nieoczekiwanie $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Można przypuszczać, że obecność $\sqrt{\pi}$ dała znak Eulerowi, by użyć wyższych narzędzi analitycznych – całek. Rezultatem prac Eulera było przedstawienie (2) jako:

$$n! = (-1)^{-n} \int_0^1 \ln^n x \, dx = \int_0^1 (-\ln x)^n \, dx \tag{3}$$

co jest wyrażeniem dobrze określonym dla $\operatorname{Re} n > -1$. Przekonajmy się, że wynik ten faktycznie spełnia podstawową zależność rekurencyjną silni (1). Uprzednio przecałkujmy przez części naszą formułę:

$$\int \ln^n x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = 1 & v(x) = \ln^n x \\ u(x) = x & v'(x) = \dfrac{n \ln^{n-1} x}{x} \end{array} \right| = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx$$

Nasz rezultat możemy wstawić z odpowiednimi granicami całkowania do ilorazu silni:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(-1)^{-n-1} \int_0^1 \ln^{n+1} x \, dx}{(-1)^{-n} \int_0^1 \ln^n x \, dx} = -\frac{\left(x \ln^{n+1} x\right) \Big|_0^1 - (n+1) \int_0^1 \ln^n x \, dx}{\int_0^1 \ln^n x \, dx}$$

$\left(x \ln^{n+1} x\right)\Big|_0^1 = 0$, a zatem mamy:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = -\frac{-(n+1)\int\limits_0^1 \ln^n x \, dx}{\int\limits_0^1 \ln^n x \, dx} = n+1$$

W istocie, niezależnie od n (o ile tylko te całki niewłaściwe są zbieżne) otrzymaliśmy postulowaną równość. Pozostaje sprawdzić, czy faktycznie $1! = 1$ – to zadanie jest jednak trywialne. Teraz zaproponujemy nieco inną postać tejże całki, bardziej rozpowszechnioną. Wyjdźmy z dosyć nietrudnej obserwacji[2]. Wyznaczmy poniższą całkę:

$$I_n = \int e^{-t} t^{n-1} \, dt = \left| \begin{matrix} u'(t) = e^{-t} & v(t) = t^{n-1} \\ u(t) = -e^{-t} & v'(t) = (n-1)t^{n-2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -e^{-t}t^{n-1} + (n-1) \int e^{-t} t^{n-2} \, dt =$$

$$= -e^{-t}t^{n-1} + (n-1) \, I_{n-1} =$$

$$= -e^{-t}t^{n-1} + (n-1) \left[-e^{-t}t^{n-2} + (n-2) \, I_{n-2} \right] =$$

$$= -e^{-t}t^{n-1} - (n-1)e^{-t}t^{n-2} - (n-1)(n-2)e^{-t}t^{n-3} - \ldots - (n-1)! \, I_0$$

Skoro

$$I_1 = \int e^{-t} \, dt = -e^{-t} + C,$$

to finalnie uzyskuje się postać:

$$I_n = -e^{-t} \left(t^{n-1} + (n-1)t^{n-2} + \ldots + (n-1)! \right) + C =$$

$$= -e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} t^{n-1-k} + C$$

Wyraz wolny wielomianu $-e^{-t}P(t)$ jest tym, czego szukamy – silnią. Stąd, biorąc $t \to 0$ lub przyjmując konwencję $0^0 = 1$, bezpośrednio otrzymujemy

[2] Ale jakże błyskotliwej dla tego typu problemu!

$I_n(0) = -(n-1)!$. Wiedząc, że, gdy $t \to +\infty$, wyrażenie $I_n(t)$ się zeruje, możemy już skonstruować naszą funkcję, którą nazwiemy *funkcją* Γ *Eulera*:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Powyższy wzór sprawdza się tylko dla $x \in \mathbb{C}$ o części rzeczywistej dodatniej. Można go także uzyskać, podstawiając $t = e^{-x}$ w całce (3). Warto nadmienić, że to nie jest jedyna możliwa kontynuacja silni.

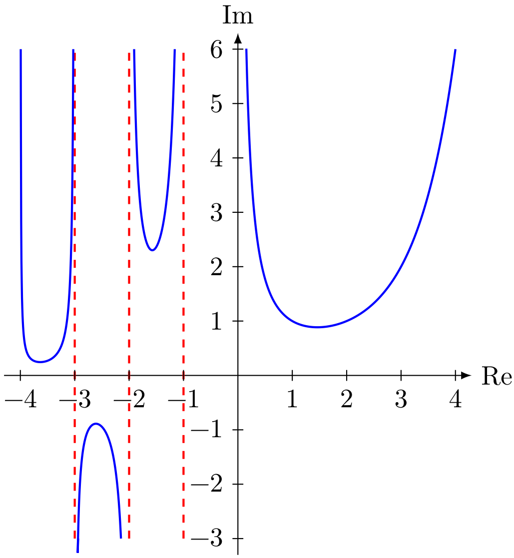
Istnieje cała rodzina funkcji meromorficznych, która interpoluje $n!$; wszystkie są postaci:

$$f(z) = \frac{e^{-g(z)}}{z \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}} \tag{4}$$

gdzie $g(z)$ jest funkcją całkowitą spełniającą równanie funkcyjne

$$g(z+1) - g(z) = \gamma + 2k\pi i$$

dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\gamma = 0.5772156649\ldots$ będącą stałą Eulera-Mascheroniego.



Rysunek 2: Wykres funkcji $\Gamma(x)$.

Ale nie ma wątpliwości, że propozycja Eulera jest najlepsza. Nie tylko odpowiada najprostszemu doborowi $g(z)$ jako γz, ale także, zgodnie z twierdzeniem udowodnionym przez Wielandta w 1939 roku, jest jedyną funkcją będącą przedłużeniem analitycznym silni spełniającą następujące warunki [4]:

1. $f(1) = 1$,
2. $f(z+1) = zf(z)$ dla $\operatorname{Re} z > 0$,
3. $f(z)$ jest funkcją analityczną dla $\operatorname{Re} z > 0$,
4. $f(z)$ jest ograniczone dla $\operatorname{Re} z \in [1, 2]$.

Nieco wcześniej, bo w 1922, Mollerup i Bohr wykazali, że jest to jedyna funkcja spełniającą dwa pierwsze warunki, która jest logarytmicznie wypukła (tj. $\ln \Gamma$ jest wypukła dla argumentów dodatnich) [3]. Funkcja Γ ma zastosowanie praktycznie w każdej gałęzi dzisiejszej analizy (także i rachunku prawdopodobieństwa oraz nawet teorii liczb). Za jej pomocą można wyrazić pewne szczególne związki z innymi funkcjami specjalnymi, np. regułę odbicia funkcji ζ Riemanna:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

Co więcej, funkcja Γ jest spójna z innymi teoriami, np. służy także do uogólniania całek i pochodnych na stopnie niecałkowite.

Nasza praca nie została zakończona. Wciąż nie znamy wartości $\Gamma(z)$ dla liczb o części rzeczywistej ujemnej. Nie kto inny, jak Euler, wykazał w 1771 roku regułę odbicia dla funkcji Γ, która „domyka" tę funkcją na maksymalny zbiór określoności $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$, gdzie $(-\mathbb{N}_0) = \{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant 0\}$. Przedstawimy ją w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Dla* $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ *zachodzi:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Dowód. Skorzystajmy z postaci (4):

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}$$

Wyznaczmy iloczyn $\Gamma(z)\Gamma(-z)$:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\frac{e^{\gamma z}}{-z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{z/k}\left(1-\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{-z/k}$$
$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)^{-1}$$

Wykorzystajmy fakt, iż

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\right) = \frac{\sin z}{z}.$$

Aplikując tę tożsamość[3], uzyskujemy:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

co przy wykorzystaniu własności rekurencyjnej $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$, daje tezę. □

Na koniec spróbujmy na podstawie naszych doświadczeń znaleźć rozszerzenie innej sekwencji. Rozwiążmy ciąg a_n określony jako liczbę wszystkich możliwych sekwencji elementów z tego zbioru co najwyżej n-wyrazowych[4], o początkowych wyrazach 2, 5, 16, 65, ..., który symbolicznie można zapisać jako sumę:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} \tag{5}$$

[3]Pozostawimy ją bez dowodu. Najpopularniejsze wyprowadzenie tej zależności opiera się na wykorzystaniu własności

$$\sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2i} = \frac{1}{2i}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n - \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n\right]$$

oraz rozpisaniu tychże składników jako sumy:

$$\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{ix}{n}\right)^k \quad \text{oraz} \quad \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{ix}{n}\right)^k$$

[4]Przykładowo $a_3 = 16$, bo:

$$\mathcal{L}(\{1,2,3\}) = \big|\{(),(1),(2),(3),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,1,2)\}\big| = 16$$

W tym celu rozważmy całkę

$$I_n = \int e^{1-t} t^n \, dt,$$

którą rozwiążemy metodą całkowania przez części:

$$\begin{aligned}
I_n = \int e^{1-t} t^n \, dt &= \begin{vmatrix} u'(t) = e^{1-t} & v(t) = t^n \\ u(t) = -e^{1-t} & v'(t) = nt^{n-1} \end{vmatrix} = \\
&= -e^{1-t} t^n + n \int e^{1-t} t^{n-1} = \\
&= -e^{1-t} t^n + n \, I_{n-1} = \\
&= -e^{1-t} t^n - ne^{1-t} t^{n-1} + n(n-1) \, I_{n-2} = \\
&= -e^{1-t} t^n - ne^{1-t} t^{n-1} - n(n-1) e^{1-t} t^{n-2} - \ldots - n! e^{1-t} + C
\end{aligned}$$

Stąd

$$I_n = -e^{1-t} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} t^k.$$

Porównując ten wzór ze wzorem wyjściowym (5), proponowanym uciągleniem a_n może być:

$$a_n = \int_1^{+\infty} e^{1-t} t^n \, dt$$

Czytelnik może przekonać się o prawdziwości tejże formuły.

[Literatura]

[1] Leonhard Euler, *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5, 1738, pp. 36-57.

[2] Edward Sandifer, *How Euler Did It.* Mathematical Association of America.

[3] J. Mollerup, H. Bohr, *Lærebog i Kompleks Analyse vol. III.* Copenhagen.

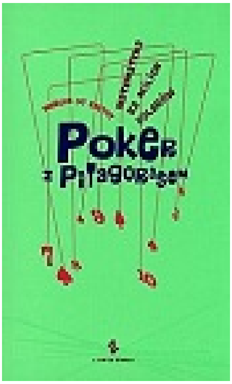
[4] Reinhold Remmert, *Wielandt's theorem about the* Γ*-function.* The American Mathematical Monthly 103, 1996, S. 214–220.

Mateusz Szymański

[Opowiedzieć matematykę]

Poker z Pitagorasem. Matematyka za milion dolarów

Pierwszym moim spotkaniem z książką o matematyce była niezapomniana Lilavati Szczepana Jeleńskiego – małe arcydzieło. Wszystko jest w tej książce dobre: dobór treści i ich uporządkowanie, język (barwny, wręcz baśniowy – a przy tym bez trudu zrozumiały dla dziecka), osiągnięta przez świetne złożenie graficzne czytelność. Tym jednak, co chyba w niej najważniejsze, jest to, że stoi „obok” wiedzy matematycznej czytelnika – można ją czytać w każdym wieku i z każdą ilością tejże wiedzy z równą przyjemnością. Większość książek opowiadających o matematyce, na które trafiłam później, nie ma już tej cechy – albo wymagają pewnego matematycznego tła, by czytało się je naprawdę dobrze, albo są dobrze dobrane do potrzeb i możliwości czytelnika młodszego, mniej obytego matematycznie, ale raczej nużą tego, kto o matematyce więcej wie.



Do tej drugiej kategorii należy *Poker z Pitagorasem. Matematyka za milion dolarów* Marcusa du Sautoya. Jest to zabieg celowy – autor, profesor matematyki w Uniwersytecie Oxfordzkim, specjalizujący się w teorii liczb i teorii grup, przeprowadził kiedyś pięć świątecznych seminariów dla uczniów w wieku od jedenastu do czternastu lat w ramach Royal Institution. Celem tych wykładów było, jak sam pisze, „otwarcie nauki na ogół społeczeństwa, ze szczególnym naciskiem na młodszych widzów”, w czym wydatnie pomagała transmisja telewizyjna. Pięć wykładów przerodziło się w sporo więcej; talent do wzbudzania zainteresowania matematyką profesora du Sautoya został zauważony bardzo szybko i zewsząd posypały się zaproszenia do brytyjskich szkół oraz programów telewizyjnych[5].

Na kanwie spotkań z uczniami oraz programów telewizyjnych powstało kilka książek; jedną z nich jest wspominany *Poker z Pitagorasem*. Książka składa się z pięciu rozdziałów, z których każdy ma inny motyw przewodni, i każdy kończy się opisaniem jednego z problemów „milionodolarowych” Claya. Pierwszy rozdział to *Ciekawy przypadek niekończących się liczb pierwszych*, a w nim – dlaczego David Beckham wybrał koszulkę z numerem 23, o cyklu życiowym cykad, zamieszkujących Amerykę Południową, o starożytnych metodach zapisu liczb, o ciągu Fibonacciego i o liczbach pierwszych. Z kolei z *Historii nieuchwytnego kształtu* dowiadujemy

[5]Obecnie prof. Marcus du Sautoy jest kierownikiem Katedry Simonyiego na rzecz Powszechnego Zrozumienia Nauki (objął kierownictwo po Richardzie Dawkinsie), współpracownikiem szeregu czasopism, m.in. „The Times”, radia i telewizji BBC, autorem kilku książek, a za swoją działalność na rzecz popularyzacji nauki otrzymał szereg nagród.

się, dlaczego bańki mydlane są kuliste, poznajemy bryły platońskie i historię zmian kształtu torebek herbaty, od kwadratowych, przez okrągłe, do tych w kształcie ostrosłupów; czytamy o fraktalach, topologii i kształcie Wszechświata. Trzecia część książki, *Tajemnica dobrej passy*, traktuje o zastosowaniach logiki i rachunku prawdopodobieństwa w teorii gier – czytamy więc o pokerze, kasynach, loteriach, DnD, sudoku, kwadratach magicznych czy mostach królewieckich. Przedostatni, czwarty rozdział to *Zagadka kodu nie do złamania, czyli o kryptografii* – m.in. o szyfrach podstawieniowych, o Enigmie[6], o V symfonii Beethovena i albumie Coldplay, o numerach ISBN oraz kalkulatorze zegarowym. Książkę kończy *Wyprawa w przyszłość*: o zaćmieniach Słońca i Księżyca, o równaniach opisujących tor ruchu piłki po uderzeniu Wayne'a Rooneya; dowiadujemy się, dlaczego bumerang wraca, jak to naprawdę jest z lemingami i czym są turbulencje.

Na każdej stronie książki widać starania (bardzo udane!) autora, by pozycję tę uczynić ciekawą dla nastoletnich uczniów. Prof. du Sautoy odwołuje się do tego, co dla nich bliskie, znajome – piłki nożnej, gier komputerowych i nie tylko; książka bogata jest w rysunki i, z czym spotykam się w tego typu pozycji po raz pierwszy, w kody QR, które, zeskanowane smartfonem, prowadzą do specjalnie utworzonych stron internetowych, powiązanych z książką. Autor zachęca do pobierania plików ze swojej strony internetowej i nie tylko; można też kupić aplikację zawierającą interaktywną wersję większości gier wymienionych w książce. Warto tu podkreślić, że odniesienia do Internetu są jednak wplecione w ten sposób, że np. nieposiadanie smartfona wcale nie odbiera przyjemności korzystania z książki.

Imponujący jest zakres materiału poruszanego przez prof. du Sautoya; opisy są rzecz jasna krótkie, ale w zupełności wystarczające. Dodatkowe atuty to lekki język, swoboda pisania oraz ogromny entuzjazm autora, wyczuwany na każdym kroku: widać, że Marcus du Sautoy pasjonuje się matematyką, opowiadaniem o matematyce i – ludźmi, którym o matematyce opowiada. Podziwiam też dobór treści – jest naprawdę wyjątkowo trafnie dobrany tak do zainteresowań, jak możliwości nastolatków. Znuży, obawiam się, czytelnika bardziej obeznanego matematycznie, ale to nie zarzut ani nie wada; jest to bardzo dobrze napisana książka dla uczniów[7].

Wydaje się, że recenzję tę można by zakończyć w jeden tylko sposób – entuzjastycznie polecając ją dla uczniów, w szczególności tych, których z matematyką dopiero trzeba oswoić. Niestety! Z całkowicie niepojętych dla

[6] Niestety, nie pojawiają się nazwiska Mariana Rejewskiego, Jerzego Różyckiego i Henryka Zygalskiego – autor mówi jednak przez kilka stron o „Polakach", co jednak jak na książkę brytyjską i tak jest rzadkością.

[7] Wypadałoby w tym miejscu przyznać, że mogłam nieco przeszarżować w ocenie wiedzy uczniów – nie jestem na specjalności nauczycielskiej, więc, choć osobiście zgadzam się z wskazywanym w wypowiedziach autora (11-14 lat), być może powinno się nieco przesunąć tę granicę w stronę ostatniej klasy gimnazjum i szkoły średniej.

mnie przyczyn wydawca polski postanowił książkę po swojemu „ulepszyć". Rozpoczął od tytułu – w oryginale to *The Number Mysteries. A Mathematical Odyssey through Everyday Life*; rozumiem jednak, że wyrazy takie jak „poker", „Pitagoras" i „milion dolarów" uznane zostały za bardziej przyciągające czytelnika. Gdyby jednak ktoś tych „kluczowych" wyrazów nie zauważył – zadbano o to, by nie dało się nie zauważyć okładki: jest jaskrawozielonego, odblaskowego koloru, z tytułem w n kierunkach i trzech kolorach (a czcionką – jak w starych WordArtach), w tym różowym. Wszystkiego jest w tej porażającej okładce za dużo – kolorów, kształtów, kierunków; brakuje tylko jednego – gustu. Powiedzmy jednak, że to nie problem, wszak książkę można obłożyć. Tym jednak, czego zignorować ani „naprawić" się już nie da, jest sposób jej złożenia.

Jak wspomniałam, książka powstała na kanwie spotkań z uczniami; w założeniu to pięć lekkich, rozłącznych rozdziałów. Niestety, polskie wydanie rozdmuchano do stron blisko trzystu pięćdziesięciu (sic!), kosztem sztucznego zwężenia – i tak otrzymujemy produkt gruby i wąski, niewygodny do trzymania w ręce, ale też, przede wszystkim, czytania; ma około sześciu wyrazów w linii, co jest bardzo nienaturalne i męczące dla czytelnika[8]. Czyta się tę książkę po prostu fatalnie. Absurdalne powiększenie objętości sprawiło, że straciła zarazem lekkość i moc; co więcej, druk jest bardzo cienki, rozdziały oddzielone bardzo, ujmijmy to eufemistycznie, dyskretnie, a podrozdziały niemal wcale, przez co wszystko się zlewa. Dodatkowo zaginęły gdzieś w tekście rysunki, drukowane grubością tak pajęczą, że ledwie widoczne, a przez to, że na stronie niemal nic się nie mieści, i one gdzieś w tym wszystkim umykają. Lektura, zamiast sprawiać przyjemność, męczy.

Marcus du Sautoy stworzył świetną książkę dla nastoletnich uczniów, z którą poradzą sobie także i ci, którzy z matematyką do tej pory niewiele mieli do czynienia. Niestety, nie wierzę, by w takim wydaniu, jakie stworzyło wydawnictwo Carta Blanca, jakikolwiek nastolatek po tę książkę sięgnął, a tym bardziej – całość przeczytał. Widzę ją tylko jako pomoc dla nauczyciela, który chce wpleść w lekcję ciekawostkę, czyta tylko fragment tekstu naraz. Książkę polecam serdecznie, ale – raczej w oryginale.

[Literatura]

[1] Marcus du Sautoy, *Poker z Pitagorasem. Matematyka za milion dolarów*, Carta Blanca, Warszawa 2012, ISBN 978-83-7705-178-8.

Joanna Zwierzyńska

[8] Dla porównania: wspomniana Lilavati (WSiP 1992) ma średnio około dziesięciu wyrazów w wierszu.

[Co nas czeka, czyli z życia matematyków]

Ponownie proponujemy Wam dwie anegdotki z polecanej już książki Mathematical Apocrypha (por. ostatni numer Macierzatora).

Jak wiadomo, matematycy mają w zwyczaju odwiedzać się nawzajem w uniwersytetach. W latach pięćdziesiątych na uniwersytecie Stanford takimi wizytującymi matematykami byli m.in. M. Fekete oraz W. Rogosinski. Ponieważ przyjechali oni bez rodziny, zostali osadzeni w akademiku (nie myślmy tu o polskich realiach akademikowych – na pewno nie musieli robić tostów na żelazku). Pewnego poranka Rogosinski spotkał Feketego przy goleniu i zapytał go, jak mu minęła noc.

— Całkiem nieźle – odparł Fekete. – Udowodniłem takie twierdzenie...

***

W 1966 roku nazwisko Richarda Feynmana miało pojawić się w pewnej szwedzkiej encyklopedii. Twórcy chcieli pokazać nieco bardziej ludzką stronę słynnego fizyka i jakoś złagodzić ilość technicznych detali jakie miały pojawić się w artykule. Usłyszawszy że Feynman potrafi grać na bębnach bongo, wysłali do niego list z prośbą o fotografię jego grającego na owych bębnach. Jego odpowiedź brzmiała:

Szanowny Panie,
Fakt, że gram na bębnach nie ma nic wspólnego z tym, że zajmuję się fizyką teoretyczną. Fizyka teoretyczna to zajęcie ludzkie i jedno z największych osiągnięć ludzkości, i nieustająca chęć, by udowodnić, że ludzie, którzy to robią, są ludźmi, poprzez pokazywanie, że robią oni też inne rzeczy (na przykład, grają na bębnach bongo) mnie obraża. Jestem dostatecznie ludzki, by kazać Ci iść do diabła.

Wybór i tłumaczenie: Niewinny Rosomak

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Mateusz Jurczyński, Beata Łojan, Mateusz Szymański, Joanna Zwierzyńska
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

styczeń 2013

[Short Track Master's Programme – z czym to się je?]

Jechać? Nie jechać? Jedną z bardzo ciekawych możliwości, jaką dają studia w Instytucie Matematyki UŚ, jest oferta skierowana do studentów II roku II stopnia, którzy mogą na rok wyjechać do Amsterdamu. Nie jest to to samo, co Erasmus – zaryzykowałabym stwierdzenie, że to rozwiązanie ciekawsze, ponieważ kończy się uzyskaniem dyplomu obu uczelni – UŚ i VU w Amsterdamie. Opowie o nim w niniejszym artykule jedna z osób, które skorzystały z tej możliwości.

Artykuł ten ukaże się w lutowym numerze [*Macierzatora*]. *Ponieważ jednak termin składania dokumentów upływa w pierwszy dzien po feriach, zdecydowaliśmy się na dołączenie go również do elektronicznego wydania numeru styczniowego, tak aby ci, którzy jeszcze się wahają, mogli podjąć ostateczną decyzję – a gorąco zachęcamy do tego, by z szansy wyjazdu skorzystać. Natomiast młodszych studentów zachęcamy do zastanowienia się nad wyjazdem – naprawdę warto! Z myślą o nich artykuł pojawi się również w numerze lutowym.* (*red.*)

Po raz kolejny Uniwersytet Śląski oferuje studentom I roku studiów magisterskich możliwość wyjazdu do Amsterdamu na ostatni rok studiów, który to rok (jeśli wszystko dobrze pójdzie) zostanie zwieńczony otrzymaniem podwójnego dyplomu magistra – z Uniwersytetu Śląskiego oraz z Vrije Universiteit Amsterdam. Oczywiście, decyzja o wyjeździe na tak długo jest decyzją sporą, naturalne są wszelkiego rodzaju obawy „Czy ja sobie poradzę?", oraz, oczywiście, dręczy nas pytanie „A czy w ogóle warto?" W dzisiejszym reportażu Niewinny Rosomak, amsterdamski weteran, opowie nam, czego w Amsterdamie się nauczył, czego nie, czy warto tam pojechać, jakie są okazje i czego należy się wystrzegać.

Zacznijmy przede wszystkim od tego, że Rosomak ów weteranem nie jest absolutnie jedynym. Co najmniej czworo członków Koła (byłych, albowiem skończyli już oni studia) przetrwało rok w Amsterdamie, zdobyli swe podwójne dyplomy, przeżyli i w ogóle szczęśliwie hasają po świecie. Zatem uzyskanie stypendium w Amsterdamie nie jest absolutnie wyczynem, którego dokonała jedna osoba w historii, i argument, by do Amsterdamu nie aplikować „A bo to na pewno nie mój poziom" odpada natychmiastowo i z definicji. Jestem pewien że wielu studentów o tym programie słyszało i zrezygnowało z aplikacji ze względu na jakąś kwestię zbyt niskiej samooceny czy czegoś w tym rodzaju – absolutnie rozumować w ten sposób nie należy! Aplikacja nie zabiera wiele czasu, koszty administracyjne są w znakomitej większości zwracane w razie gdybyśmy zrezygnowali i/lub się nie dostali, i ogólnie w całej aplikacji możemy albo zyskać wspaniałą możliwość roku za granicą, albo nic nie stracić i wyjść na zero. Zatem wartość oczekiwana aplikacji jest zdecydowanie dodatnia. Probabilistyczna dusza w (prawie) każdym z nas powinna zatem w tym momencie już rwać się do aplikowania.

Informacje o rekrutacji: http://www.math.us.edu.pl/VU-Rekrutacja_2013_2014.pdf

Oczywiście, twierdzenie że wyjazd do Amsterdamu jest dla każdego jest tu tezą dość ryzykowną. Ustalmy zatem kilka faktów. Rok w Amsterdamie będzie rokiem wymagającym pewnej dozy samodyscypliny i umiejętności samodzielnej nauki. W Amsterdamie na wielu przedmiotach nie ma w ogóle „ćwiczeń" w takim sensie w jakim my mamy ćwiczenia tutaj. Jeżeli są zadawane zadania domowe, to na ewentualny sposób ich rozwiązania trzeba wpaść na własną rękę – potrzebne algorytmy niekoniecznie będą podane na tacy. Oznacza to w szczególności konieczność czytania większej ilości literatury matematycznej niż moglibyśmy być do tego przyzwyczajeni – ale czyż nie na tym polegają studia magisterskie? Dodatkowo, liczba przedmiotów wymaganych do zaliczenia całego roku oscyluje w granicach 4 lub 5 (zależnie od tego, jak trudne przedmioty sobie dobierzemy, o czym dalej), plus napisanie pracy magisterskiej. Z każdego przedmiotu mamy tylko jedne zajęcia tygodniowo. Zatem w budynku uczelni będziemy spędzać zdecydowanie mniej czasu niż w Katowicach – ale ten czas trzeba odpracować na własną rękę w domu, czytając bibliografię przedmiotu et caetera. Formalizm uczelniany nie powiezie nas w srebrnej karocy do dyplomu magistra – trzeba samemu dopilnowywać terminów, dokumentów do złożenia, samemu dbać o rejestrację na przedmioty (bez wielu, wielu przypomnień ze strony uczelni i życzliwych pań z dziekanatu). Jeżeli więc uczelnia jest dla Ciebie złem koniecznym, dokumenty składasz w siódmym terminie poprzez wrzucenie ich przez okno dziekanatu i uciekanie nim pani Ania Cię zastrzeli, a swój dyplom licencjacki uzyskałeś po dziwnej aferze związanej z tajnym agentem, zaginionymi dokumentami, leguminą w sosie i hordą dziobaków, to być może Amsterdam nie jest dla Ciebie.

Dodatkowo, swoje przedmioty w Amsterdamie wybieramy sami. Poza dokończeniem przedmiotów blokowych, które trzeba będzie zaliczyć na naszym Uniwersytecie w trybie indywidualnym (warto tu podkreślić, że wykładowcy z naszego Instytutu są w tej kwestii bardzo wyrozumiali), przedmioty w Holandii są zupełnie w naszej gestii. Nasz wybór konsultujemy z naszym promotorem z Uniwersytetu Śląskiego oraz z tzw. „Master's coordinator" z Amsterdamu. W przedmiotach może więc figurować zaawansowana analiza funkcjonalna, metody statystyczne i teoria kategorii, mogą one wszystkie być z jednej dziedziny, a mogą być rozrzucone, jedne mogą być kontynuacją innych, albo wszystkie mogą być zupełnie ze sobą nie powiązane. Jest to w zupełności nasz wybór i praktycznie nie istnieje instytucja „przedmiotu obowiązkowego", który muszą wziąć wszyscy.

„Ojejku jejku, rok za granicą, ale przecież ja nie mówię w żadnym języku, uschnę na obczyźnie i dopadną mnie galopujące suchoty". Czy to właśnie sobie, drogi Czytelniku, pomyślałeś widząc amsterdamską ofertę[9]?

[9]Niekoniecznie dokładnie w tych słowach.

Nie ukrywajmy, rok za granicą nie jest błahostką – oddzielenie od rodziny i znajomych może człowieka „trafić”. Jednak wyjeżdżając do Amsterdamu, trafimy do studenckiego domu, w którym wszyscy są w takiej samej sytuacji jak my. Najprawdopodobniej nasz pokój będzie się znajdować na Uilenstede, studenckim kampusie VU Amsterdam, gdzie wszyscy wokół nas będą takimi samymi studentami, w większości z obcych krajów, jak my. Wspólnie będzie można przeżywać wzloty i upadki, trudy i znoje. Nawet jeżeli nasze mieszkanie okaże się znajdować poza Uilenstede, na pewno będzie ono w jednym ze studenckich domów należących do VU, zatem towarzystwo wokół nas zawsze będzie „z naszej półki”. Znajomość języka? Komunikatywny angielski w zupełności wystarcza. Oczywiście w procesie aplikacyjnym niezbędny jest jakiś dokument potwierdzający nasze umiejętności – certyfikat co najmniej FCE lub TOEFL byłby tu chyba najlepszy – ale jest to bardziej formalność niż mur nie do przebycia. Na miejscu spotkamy ludzi o bardzo zróżnicowanych poziomach językowych i nikt nie wstydzi się tego, że zagadnienie siódmego conditionalu podwójnie złożonego splecionego z perfect past future continuous in the fourth dimension olaboga czik cziki bum przekracza ich możliwości gramatyczne. Jednocześnie angielski w zupełności wystarczy do przeżycia ze względu na fakt, że w Holandii po angielsku mówią prawie wszyscy. Nawet jeśli akurat trafi się nam sklepikarz po angielsku niemówiący, jest pewne że jeden z klientów sklepu, słysząc problem komunikacyjny, przybędzie nam z pomocą. Niewinny Rosomak długo nie zapomni konwersacji po angielsku z panią z warzywniaka oraz nienagannego brytyjskiego akcentu wezwanego elektryka. Holenderski, owszem, pojawia się na znakach na ulicach oraz w urzędowych pismach. Podstawowe zwroty (typu „UWAGA”) można jednak łatwo wyłapać z kontekstu, a dla urzędowych pism, no cóż, istnieje Google Translate. Na szczęście pisma, które przyjdą do nas nie będą raczej wymagały szczegółowego przestudiowania – będą to głównie rzeczy natury formalnej typu „proszę podpisać że w roku tym a tym będzie Pan/Pani mieszkał/a pod tym adresem”.

Jeżeli chodzi o obawy natury czysto towarzyskiej – nieco bardziej indywidualne studia oznaczają w szczególności większą swobodę w gospodarowaniu swym czasem. Przy mnogości zajęć, jakie oferuje VU Amsterdam, kół studenckich, kółek hobbystycznych, centrum sportowego i innych stowarzyszeń wszelkiego rodzaju, oraz w świetle tego, że będziemy mieszkać z innymi podobnymi sobie studentami, prawdopodobieństwo nieznalezienia ani jednej osoby do wylania swych żalów, wypicia... herbaty i porozmawiania o matematyce dąży do zera szybciej niż [tu proszę wstawić swój ulubiony przykład szybko zmierzającego do zera ciągu]. Zwłaszcza w czasach portalów takich jak Facebook, dzięki któremu będziemy mogli regularnie otrzymywać wszelkie powiadomienia o imprezach niedaleko nas, ciekawych ofertach i okazjach itd. Z drugiej strony, indywidualne pokoje pozostawiają swój prywatny kącik, gdyby ktoś chciał po prostu wieczorem się zaszyć pod kołdrą w starym dresie, oglądając serial.

Jakie przedmioty możemy wybrać? Najprawdziwsza odpowiedź tutaj brzmi: wszystkie. VU Amsterdam jest uczelnią, owszem, specjalizującą się w zastosowaniach matematyki, statystyce et caetera, zatem na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać że program wymiany jest odpowiedni wyłącznie dla studentów matematyki finansowej. Holandia jednak posiada bardzo ciekawy program integrujący największe uczelnie w kraju, dzięki któremu studenci matematyki mogą wybierać sobie przedmioty również z tych innych uczelni, a ewentualne koszta dojazdu do np. Utrechtu czy Nijmegen są refundowane. I tak znaleźć można kurs zaawansowanej analizy funkcjonalnej, algebr operatorów, procesów stochastycznych, krzywych eliptycznych, geometrii algebraicznej, teorii sterowania, topologii... Trudno byłoby podać przykład dziedziny matematycznej, której nie dotykałby przynajmniej jeden przedmiot z listy przedmiotów dostępnych. Niezależnie od tego jaka dziedzina matematyki budzi Twoje zainteresowanie, na pewno będziesz miał okazję się w niej rozwijać w Amsterdamie.

Istotną i zawsze nieprzyjemną kwestią są oczywiście finanse. Wśród studentów tajemnicą poliszynela jest, że na wymianach pokroju Erasmusa trzeba dość sporo wyłożyć z własnej kieszeni – jak to wygląda w przypadku Amsterdamu? Nie da się ukryć, stypendium nie pokryje w stu procentach wszystkich kosztów życia, wliczając w to wyżywienie, czynsz i koszty przyjazdu do Polski np. na Święta. Jednak z porównań ze znajomymi, którzy mieli okazję wyjechać na Erasmusy, mogę z dużą pewnością powiedzieć, że Short Track Master's Programme jest pod tym względem bardziej przyjazny. Oferowane stypendium pokrywa czesne i czynsz z drobnym naddatkiem, zatem de facto jedynym co trzeba wyłożyć z własnej kieszeni są koszta życia i ewentualnych przejazdów (i kupna używanego roweru, bez którego ani rusz). Oczywiście, nic nie przeszkadza nam w podebraniu jakowejś robótki na miejscu. Dwa lata temu ruszyła inicjatywa StudentsTutors, dzięki której studenci chcący udzielać korepetycji mogliby być wyświetlani we wspólnej wyszukiwarce korepetytorów, ułatwiając szukanie tak nauczycieli, jak i uczniów – nie wiem, na ile ta inicjatywa rozwinęła się od czasu mego wyjazdu, ale na pewno warto się jej przyjrzeć.

Jako amsterdamski weteran, pozostaje mi na zakończenie podzielić się jeszcze kilkoma ogólnymi obserwacjami na temat życia w Amsterdamie. Po pierwsze, rower. Nie trzeba być genialnym kolarzem by na ulicach Amsterdamu sobie poradzić, więc jeśli ktoś się tym stresuje, to nie musi. Zdecydowanie jednak rower kupić sobie należy, i najlepiej nie jakiś znaleziony w Internecie za 40 euro – lepiej zapłacić te 20 euro więcej i zaoszczędzić na naprawach. Niestety, w Amsterdamie sporo jest ludzi sprzedających rozlatujące się graty za grosze. Ponieważ za najprostszą naprawę amsterdamscy mechanicy rowerowi liczą sobie około 20 euro właśnie, ewentualna kwota, którą byśmy zaoszczędzili, szybko znika. Oczywiście dokupić należy również łańcuch, na którym także nie należy oszczędzać. Jako pocieszenie, rower na koniec roku można z powrotem sprzedać – w zależności od naszych umiejętności targowania się i stanu roweru, być może wyjdziemy nawet na zero. Bardzo polecam stronę na Facebooku „Erasmus Amsterdam Wyn" (Wyn=Whatever You Need), na której można znaleźć w miarę bezpieczne oferty sprzedaży rowerów (i innych rzeczy), i na koniec roku zamieścić własną.

Po drugie – o czym wspominam, bo o to pytają mnie niemal wszyscy – homoseksualiści i coffee shopy. Są, istnieją, nie, nie narzucają się, wszelkiego rodzaju najgorsze stereotypy, jakie ktokolwiek mógł zasłyszeć są z gruntu fałszywe. Poza tym dwa lata temu Holandia wprowadziła obowiązek rejestracji klientów w coffee shopach i z tego, co wiem, obcokrajowcy nie mogą tam robić zakupów, więc jeśli ktoś chciałby jechać do Amsterdamu w tym celu, muszę go rozczarować.

Po trzecie, ulgi dla obcokrajowców. Polecam rozejrzeć się za tzw. „toeslagen" (dosłowne tłumaczenie: ulgi) i w razie podjęcia jakiejkolwiek pracy na miejscu za „studiefinancering". (chyba nie muszę tłumaczyć) Nie wiem jakie są dokładnie teraz tego zasady (z tego, co wiem, zmieniają to co roku), ale osoby z organizacji studenckiej Studentify (pochodna StudentsTutors wymienionego powyżej) na pewno z ochotą odpowiedzą na wszelkie pytania jakie jakikolwiek „świeżak" mógłby mieć. W zeszłym roku tłumaczyli oni całą stronę dotyczącą toeslagen na język angielski, by uczynić ją przyjaźniejszą dla obcokrajowców – kto wie, być może już ten projekt zakończyli. Również za moich czasów Amsterdam oferował darmowe kursy języka holenderskiego dla obcokrajowców – tzw. inburgeringscursus (dosłownie coś w rodzaju „kurs obywatelstwa"); warto za tego typu projektami się rozejrzeć (w ciągu roku nauki osoba, która nie znała przed przyjazdem po holendersku ani słowa, może dojść do poziomu B1/B2, korzystając tylko z takiego kursu – co Niewinny Rosomak sprawdził osobiście (przyp. red.)).

Po czwarte, hej, rok w Amsterdamie prawdopodobnie będzie Waszym jedynym (albo jednym z niewielu) pobytów w Holandii – wykorzystajcie go w stu procentach! Warto wykorzystać tę możliwość pod względem turystycznym, jak najwięcej zwiedzić – warto tu wspomniec o możliwości kupna Muzeumkarty, która upoważnia do wejścia przez rok do chyba wszystkich państwowych muzeów w całej Holandii; dodatkowo to świetna okazja do licznych pddróży rowerem. Trzymając kciuki za to, aby jak najwięcej osób z Katowic zdołało tam w przyszłym roku pojechać i aby wszyscy bawili się świetnie, Groetjes voor allemaal en tot ziens in Amsterdam!

Niewinny Rosomak

[Kącik TEXowy część 12]

Dołączanie rysunków oraz kolorowanie

W tej części *Kącika TEXowego* opowiemy jak dołączyć do naszego dokumentu grafiki wykonane w innych programach. Pokażemy również jak „oblać” zdjęcie tekstem oraz wspomnimy o kilku przydatnych pudełkach. Na koniec pokażemy jak sprawić, by nasz dokument był kolorowy.

Beata Łojan (`b.lojan@knm.katowice.pl`)

[Dołączanie grafiki — pakiet `graphicx`]

Podstawowym pakietem służącym do umieszczania grafik w LATEXowych dokumentach jest pakiet `grahicx`. Pakiet ten dołączamy do naszego dokumentu umieszczając w preambule `\usepackage{graphicx}`. Podstawową instrukcją dostarczaną z tym pakietem, pozwalającą na dołączanie grafik, jest

```
\includegraphics[opcje]{nazwa_pliku}
```

gdzie `nazwa_pliku` to nazwa pliku, który chcemy dołączyć do naszego dokumentu, zaś `opcje`, to parametry za pomocą których możemy sterować wyglądem dołączanego pliku. Dostępne opcje:

- `scale=wartość` – powoduje przeskalowanie obiektu o zadaną wartość. Przykładowo `scale=2` spowoduje powiększenie rysunku dwukrotnie, zaś `scale=0.5` pomniejszenie rysunku dwukrotnie.
- `width` – określa szerokość rysunku. Przykładowo `width=6cm`.
- `height` – określa wysokość rysunku. Przykładowo `height=8cm`. Należy pamiętać, że wstawiane rysunku są skalowane w taki sposób, aby zachować proporcje oryginału pomiędzy szerokością a wysokością. Dlatego też wystarczy podać jedną z tych wartości.
- `anlge` – kąt o jaki ma zostać obrócony rysunek. Przykładowo `angle=45`.
- `keepaspectratio` – powoduje, że gdy podane są wysokość i szerokość, to wstawiany rysunek zostaje tak przeskalowany, aby nie przekroczył podanych wartości.
- `origin` – określa współrzędne punktu wokół, którego obracamy (domyślnie lewy dolny róg).
- `clip` – powoduje, że wszystko, co wykracza poza wymiary obiektu jest obcinane.
- `bb` – określa wymiary rysunku (Bounding Box). Podajemy cztery wartości oddzielone odstępami będące współrzędnymi lewego dolnego i prawego górnego rogu.
- `viewport` – pozwala na wybranie z większego rysunku tylko jego fragmentu, wymiary podaje się jako cztery liczby.
- `draft` – powoduje, że zamiast rysunku wstawiana jest nazwa pliku oraz ramka określająca miejsce jakie zajmuje rysunek.

Paakiet dostarcza nam również poleceń (dokładniej pudełek) pozwalających na skalowanie i obracanie.

- `\rotatebox[opcje]{kąt}{tekst}`

  Polecenie to powoduje, że argument `tekst` zostaje obrócony o `kąt` w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Natomiast opcjonalny parametr `opcje` pozwala określić dodatkowe własności. Na przykład możemy podać wartość `origin=opis`, gdzie `opis` określa punkt obrotu zawartości pudełka:

  - `l` – lewy brzeg;
  - `r` – prawy brzeg;
  - `c` – środek;
  - `t` – górny brzeg;
  - `b` – dolny brzeg;
  - `B` – podstawa linii.

  Możemy również podać dokładne wartości współrzędnych punktu obrotu: `x=wartość, y=wartość`.

- `\scalebox{skalowanie w poziomie}[skalowanie w pionie]{tekst}`

  Polecenie to powoduje, że argument `tekst` zostaje przeskalowany w poziomie i pionie o zadane współczynniki. Parametr `skalowanie w pionie` jest opcjonalny i jego pominięcie spowoduje, że przyjmie on taką samą wartość co współczynnik `skalowanie w poziomie` i podczas skalowana zostaną zachowane proporcje.

- `\resisebox{szerokość}{wysokość}{tekst}`

  Polecenie, które przeskalowuje pudełko zawierające `tekst` do zadanych wymiarów. Określenie dowolnej z wartości jako `!` powoduje, że pozostała wartość zostanie obliczona tak, aby zachować proporcje.

Ponadto pakiet `graphicx` dostarcza nam między innymi polecenie

```
\DeclareGraphicsExtensions{lista rozszerzeń}
```

gdzie `lista rozszerzen` stanowi listę dopuszczalnych rozszerzeń nazw plików zawierających grafikę np. `\DeclareGraphicsExtensions{.bmp,.eps}`. Wówczas jeżeli w bieżącym katalogu są dwa pliki o tej samej nazwie lecz różnym rozszerzeniu nazwy o pobraniu właściwego pliku decyduje kolejność na liście. Innym przydatnym poleceniem jest

```
\graphicspath{lista katalogów}
```

gdzie `lista katalogów` określa listę katalogów, w których podczas kompilacji poszukiwane będą pliki zawierające grafiki.

[Rysunki oblane tekstem — pakiet `wrapfig`]

Kolejnym przydatnym pakietem jest `wrapfig`. Pozwala on na „oblanie” tekstem wstawianego przez nas obiektu. Służy do tego środowisko `wrapfigure`, dostarczane przez ten pakiet, o następującej składni:

środowisko_wrapfigure

```
\begin{wrapfigure}[ilosc_linii]{wyrownanie}[margines]{szerkość}
\includegraphics{rysunek}
\caption{Podpis}
\end{wrapfigure}
```

gdzie

- `ilosc_linii` – parametr opcjonalny; określa wysokość obiektu za pomocą liczby linii. Można go pominąć – wówczas LaTeX sam obliczy liczbę linii tekstu potrzebną do oblania rysunku.
- `wyrownanie` – parametr obowiązkowy; określa po której stronie ma znajdować się wstawiany obiekt; dostępne wartości to `r` – z prawej strony i `l` – z lewej strony.
- `margines` – parametr opcjonalny; określa „ujemny” lewy margines, czyli jak bardzo obiekt będzie zachodził na lewy margines
- `szerokosc` – parametr obowiązkowy, który określa szerokość obiektu.

Przykład zastosowania tego środowiska można zobaczyć w aktualnym numerze [Macierzatora][1]. Poniżej kod źródłowy:

przykład1

```
(...)opowiadających o matematyce, na które trafiłam
\begin{wrapfigure}[13]{l}{3cm}
\includegraphics[width=3cm,height=5cm]{poker}
\end{wrapfigure}
później, nie ma już tej cechy (...)
```

[Środowisko przemieszczalne `figure`]

Przy okazji omawiania LaTeXowych tabel, wspomnieliśmy o środowisku przemieszczalnym `table`. Analogicznym środowiskiem wewnątrz którego umieszczamy rysunki, zdjęcia itp. jest otoczenie `figure`. Podobnie jak `table`, posiada ono jeden argument opcjonalny, który może przyjmować jedną z wartości: `h` – wstaw rysunek w tym miejscu, `t` – na górze strony, `b` – na dole strony, `p` – na stronie z elementami przemieszczalnymi oraz znak `!` – zignoruj parametry regulujące umieszczanie obiektów ruchomych. Domyślną kombinajcą parametrów jest `tbp`. Dodatkowo jeśli umieścimy rysunki w tym środowisku, to zostaną one wstawione do spisu rysunków, który wywołujemy poleceniem `\listoffigures`.

[1] Patrz artykuł: *Opowiedzieć matematykę. Poker z Pitagorasem. Matematyka za milion dolarów.*

[LaTeX na kolorowo — pakiet `color`]

Na koniec powiemy w jaki sposób możemy zmienić kolor tekstu, czy wstawiać kolorowe pudełka. Niezbędne do tego będzie użycie pakietu `color`, w którym zdefiniowane zostały makroinstrukcje umożliwiające kolorwanie tekstu, tła oraz definiowanie własnych kolorów.

Podstawowym polceniem z tego pakietu jest `\definecolor` które pozwala nam definiować własne kolory. Polecenie to jest postaci:

```
\definecolor{nazwa}{model}{definicja}
```

gdzie `nazwa` to nazwa definiowanego koloru, `model` może przyjmować jedną z wartości: `rgb` – wówczas w definicji wpisujemy trzy liczby z przedziału $[0, 1]$, oddzielone przecinkami, określające składowe `R` (czerwony), `G` (zielony) i `B` (niebieski); `cmyk` – wówczas w definicji wpisujemy cztery liczby z przedziału $[0, 1]$, oddzielone przecinkami określające składowe `C` (cyan), `M` (magenta), `Y` (yellow) i `K` (black). Możliwe jest również korzystanie z modelu `RGB` i wówczas w definicji wpisujemy trzy liczby z przedziału $[0, 255]$, oddzielone przecinkami. Standardowo zdefniowane są kolory black, white, red, green, blue, cyan, magenta, yellow.

Do kolorowania tekstu korzystamy z instrukcji:

```
\textcolor{kolor}{tekst}
```

Polecenie to powoduje zmianę koloru pisma na wskazany[2]. Przykładowo instrukcja `\textcolor{red}{To jest tekst czerwony}` da w efekcie To jest tekst czerwony.

Kolejnym przydatnym poleceniem jest:

```
\colorbox{kolor}{tekst}
```

które powoduje zmianę koloru tła „pudełka" zawierającego `tekst`. Przykładowo `\colorbox{yellow}{To jest tekst na żółtym tle}`, da w efekcie To jest tekst na żółtym tle.

Możliwe jest również, uzyskanie pudełka, którego tło i ramka będą w różnych kolorach. Służy do tego instrukcja:

```
\fcolorbox{kolor_ramki}{kolor_tla}{tekst}
```

Działa analogicznie do `\colorbox` – podajemy dwa kolory. Przykładowo: `\fcolorbox{blue}{green}{Tekst na zielonym tle w niebieskiej ramce}`, da w efekcie Tekst na zielonym tle w niebieskiej ramce.

Możemy również zmienić kolor tła dla całej strony. W tym celu korzystamy z polecenia `\pagecolor{kolor}`, które powoduje zmianę koloru strony na zadany kolor. Na przykład polceniem `\pagecolor{yellow}` uzyskamy stronę z tłem w kolorze żółtym.

* * *

[2]Działa analogicznie jak polecenia zmiany kroju pisma np. `\textit`.