Kilka dowodów nierówności Cauchy'ego między średnimi

Szymon Draga

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego między średnimi). *Niech* $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Wówczas*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n$*.*

Dowód nr 1 (klasyczny dowód podany przez A. Cauchy'ego). Jeśli $a_1 = \ldots = a_n$, to nierówność jest oczywista. Wystarczy zatem pokazać, że jeśli nie wszystkie spośród liczb $a_1, \ldots, a_n$ są równe, to zachodzi nierówność ostra. Bez straty ogólności załóżmy, że $a_1 \neq a_2$. Dla $n = 2$ mamy

$$\sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2} \iff 0 < \frac{1}{2}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2.$$

Dla $n = 4$ mamy

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} \leqslant \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} < \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

Kontynuując to rozumowanie, dowodzimy prawdziwości twierdzenia dla potęg dwójki. Niech teraz $n < 2^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Oznaczając $A = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ oraz stosując udowodnioną nierówność dla liczb $a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A, \ldots, A}_{2^k - n}$, uzyskujemy

$$\begin{aligned}
\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot A^{2^k - n}} &< \frac{a_1 + \ldots a_n + (2^k - n)A}{2^k} = \frac{nA + (2^k - n)A}{2^k} = A \\
a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot A^{2^k - n} &< A^{2^k} \\
a_1 \cdot \ldots \cdot a_n &< A^n \\
\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} &< A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Dowód nr 2 (indukcyjny). Oznaczmy $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ oraz $x_i = \frac{a_i}{G}$, $i = 1, \ldots, n$. Dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$x_1 + \ldots + x_n \geqslant n, \quad \text{gdzie } x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1. \tag{1}$$

I) Sprawdzenie dla n=2

Ponieważ $x_1x_2 = 1$, jedna z liczb x_1, x_2 jest nie mniejsza, a druga nie większa od 1. Zatem

$$x_1 + x_2 = (1 - x_1)(x_2 - 1) + x_1x_2 + 1 \geqslant 1 + x_1x_2 = 2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = 1$.

II) Załóżmy, że nierówność (1) jest prawdziwa dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_1, \ldots, x_{n+1}$ są takimi nieujemnymi liczbami, że $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1$. Bez utraty ogólności załóżmy, że

$$x_1 = \min_{1\leqslant i\leqslant n+1} x_i \quad \text{oraz} \quad x_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant n+1} x_i.$$

Wówczas $x_1 \leqslant 1$ oraz $x_2 \geqslant 1$. Z założenia indukcyjnego dla liczb $x_1x_2,\ x_3, \ldots, x_{n+1}$ uzyskujemy

$$x_1x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} \geqslant n. \tag{2}$$

Ale $x_1 \leqslant 1$ oraz $x_2 \geqslant 1$, więc

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) \geqslant 0,$$

czyli

$$x_1 + x_2 - 1 \geqslant x_1x_2,$$

co w połączeniu z (2) daje

$$x_1 + \ldots + x_{n+1} \geqslant n + 1,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = 1$ lub $x_2 = 1$, czyli $x_1 = \ldots = x_{n+1}$, ponieważ założyliśmy, że x_1 jest najmniejszą, a x_2 największą spośród liczb $x_1, \ldots, x_{n+1}$. □

Dowód nr 3 (prawdopodobnie najkrótszy).

Lemat. *Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.*

Dowód. Tworzymy funkcję pomocniczą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Stosując rachunek różniczkowy, łatwo sprawdzić, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$, zaś rosnąca w przedziale $(0, \infty)$. Oczywiście $f(0) = 0$. □

Oznaczmy $A = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$. Wówczas

$$1 = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n \frac{a_i - A}{A}} = \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\frac{a_i-A}{A}} \geqslant \prod_{i=1}^n \Big(1 + \frac{a_i - A}{A}\Big) = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{A^n},$$

skąd $A \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a_i - A}{A} = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, czyli $a_1 = \ldots = a_n = A$. □

W pozostałych dwóch dowodach pominiemy część *przy czym* twierdzenia.

Dowód nr 4 (oparty na nierówności Jensena).

Lemat (nierówność Jensena). *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wówczas dla dowolnych liczb nieujemnych $q_1, \ldots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, o własności $q_1 + \ldots + q_n = 1$ oraz dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$ zachodzi nierówność*

$$f(q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n) \leqslant q_1 f(x_1) + \ldots + q_n f(x_n).$$

Dowód (indukcyjny). Pomijamy. □

Przyjmując w lemacie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$ dla $x \in (0,\infty)$ oraz $q_1 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} -\ln \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &\leqslant -\frac{1}{n} \ln x_1 - \ldots - \frac{1}{n} \ln x_n \\ \ln \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &\geqslant \frac{1}{n} \ln x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \\ \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &\geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}. \end{aligned}$$ □

Dowód nr 5. W dowodzie tym wykorzystamy następujący lemat.

Lemat (twierdzenie o ciągach zgodnie monotonicznych). *Niech $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Wówczas dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność*

$$a_1 b_{\sigma(1)} + \ldots + a_n b_{\sigma(n)} \leqslant a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Dowód (indukcyjny). Pomijamy. □

Wniosek. *Jeżeli $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, to dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność*

$$a_1 b_{\sigma(1)} + \ldots + a_n b_{\sigma(n)} \geqslant a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Oznaczmy $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ oraz $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{G}{a_1}$, $\ldots$, $x_n = \frac{G^{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$. Niech $x'_1, \ldots, x'_n$ będzie taką permutacją liczb $x_1, \ldots, x_n$, że $x'_1 \leqslant \ldots \leqslant x'_n$. Wtedy ciągi $x'_1, \ldots, x'_n$ oraz $\frac{1}{x'_1}, \ldots, \frac{1}{x'_n}$ spełniają założenia wniosku. Zatem

$$n = x'_1 \frac{1}{x'_1} + \ldots + x'_n \frac{1}{x'_n} \leqslant x'_1 \frac{1}{x'_{\sigma(1)}} + \ldots + x'_n \frac{1}{x'_{\sigma(n)}},$$

gdzie σ jest dowolną permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$. W szczególności

$$n \leqslant 1 \cdot \frac{a_1}{G} + \frac{G}{a_1} \cdot \frac{a_1 a_2}{G^2} + \ldots + \frac{G^{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = \frac{1}{G}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

czyli

$$G \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$ □